índex

SABER FER

- Resoldre equacions matricials del tipus $XA = B$
- Resoldre equacions matricials del tipus $AX + B = C$
- Determinar matrius que compleixin una certa condició
- Calcular les constants que fan que es compleixi una igualtat entre matrius
- Calcular la potència d'una matriu

- Comprovar propietats d'algunes matrius
- Resoldre problemes utilitzant matrius
- Determinar elements perquè una matriu sigui ortogonal
- Calcular el rang d'una matriu que depèn d'un paràmetre
- Calcular la inversa d'una matriu que depèn d'un paràmetre
- Resoldre un sistema d'equacions matricials

- Reduir un determinant a un altre determinant el valor del qual és conegut
- Calcular un determinant en funció del rang d'una matriu
- Estudiar el rang d'una matriu quadrada que depèn d'un paràmetre utilitzant determinants
- Calcular el rang d'una matriu no quadrada que depèn d'un paràmetre amb determinants

- Comprovar si una matriu que depèn d'un paràmetre té inversa
- Resoldre una equació matricial del tipus $AX = C$
- Resoldre una equació matricial del tipus $AX + B = C$
- Resoldre una equació matricial en què cal treure factor comú

- Discutir i resoldre un sistema d'equacions homogeni
- Discutir un sistema d'equacions amb paràmetres utilitzant el teorema de Rouché-Fröbenius
- Resoldre un sistema d'equacions amb paràmetres utilitzant la regla de Cramer
- Resoldre equacions matricials del tipus $AX = XA$
- Resoldre equacions matricials del tipus $AX = B$
- Resoldre problemes mitjançant sistemes d'equacions lineals

- Estudiar un sistema i resoldre'l utilitzant el teorema de Rouché-Fröbenius
- Discutir un sistema que depèn d'un paràmetre amb dues equacions i dues incògnites
- Discutir un sistema que depèn d'un paràmetre amb tres equacions i tres incògnites
- Discutir un sistema que depèn d'un paràmetre amb més equacions que incògnites
- Discutir un sistema que depèn d'un paràmetre amb tres equacions i tres incògnites

---

- Operar amb vectors utilitzant-ne les coordenades
- Trobar les coordenades de l'origen o l'extrem d'un vector que compleix certes condicions
- Determinar els vèrtexs d'un paral·lelogram
- Trobar les coordenades d'un vector respecte d'una base
- Calcular un paràmetre perquè tres vectors siguin linealment independents
- Determinar el mòdul d'un vector utilitzant la definició del producte escalar

- Calcular el valor d'un paràmetre perquè dos vectors siguin perpendiculars
- Determinar vectors perpendiculars a dos més que compleixin certes condicions
- Determinar un vèrtex d'un triangle
- Determinar vectors coneixent condicions sobre el seu producte vectorial
- Calcular el producte mixt aplicant les propietats

- Trobar la posició de dues rectes mitjançant les seves equacions implícites
- Calcular una recta perpendicular a un pla
- Calcular un pla perpendicular a una recta
- Comprovar que un punt pertany a una recta en funció d'un paràmetre
- Calcular l'equació d'una recta que passa per un punt i és paral·lela a una altra recta
- Calcular l'equació d'un pla que conté una recta i un punt exterior a aquesta
- Calcular l'equació d'un pla que conté dues rectes secants

- Calcular l'equació d'un pla que conté dues rectes paral·leles
- Calcular l'equació d'un pla que passa per un punt i és paral·lel a un altre pla
- Calcular l'equació d'un pla que conté una recta i que és perpendicular a un altre pla
- Calcular l'equació de la recta perpendicular a dues rectes
- Determinar les posicions relatives de dues rectes en funció d'un paràmetre
- Determinar les posicions relatives d'una recta i un pla en funció d'un paràmetre

---

- Calcular la distància d'un punt a un pla
- Calcular la distància entre dos plans
- Calcular la distància entre una recta i un pla
- Calcular la distància d'un punt a una recta
- Calcular la distància entre dues rectes que s'encreuen
- Determinar un pla que forma un cert angle amb un altre pla
- Calcular una recta perpendicular a una altra recta que passa per un cert punt

- Calcular un pla paral·lel a una recta que passa per un cert punt
- Calcular una recta simètrica respecte d'un pla
- Calcular el simètric d'un punt respecte d'un pla quan depèn de paràmetres
- Resoldre problemes de simetries
- Calcular el pla de simetria de dos punts
- Buscar punts que es troben a una certa distància
- Determinar una recta que es troba a una certa distància d'una altra recta
- Calcular punts d'una recta que equidisten d'altres punts

- Aplicar el teorema de Bolzano a una funció
- Aplicar el teorema dels valors intermedis a una funció
- Determinar el límit d'una operació entre valors diferents d'una funció
- Calcular el paràmetre d'una funció si es troba en un límit amb indeterminació $\infty - \infty$
- Calcular el paràmetre d'una funció quan apareix en un límit amb indeterminació del tipus 1^{∞}

- Calcular el límit del quocient de dues funcions exponencials
- Determinar si el límit d'una funció en un punt existeix o no
- Resoldre una indeterminació quan apareix una expressió del tipus $\sqrt{f(x)} \pm a$
- Calcular el paràmetre perquè existeixi el límit d'una funció en un punt
- Calcular els paràmetres perquè una funció sigui contínua
- Determinar si una equació té arrels reals
- Determinar si dues corbes es tallen
- Esbrinar si una funció pren un valor determinat

SABER FER

- Determinar el paràmetre d'una funció quan no en coneixem la recta tangent
- Determinar els paràmetres d'una funció coneguda l'equació de la seva recta tangent
- Estudiar la derivabilitat i continuïtat d'una funció
- Discutir la derivabilitat i continuïtat d'una funció a partir dels seus paràmetres

- Aplicar la regla de la cadena
- Determinar la derivada d'una funció que depèn d'una altra funció desconeguda
- Calcular derivades mitjançant derivació logarítmica
- Resoldre problemes utilitzant la derivació de funcions implícites i les propietats geomètriques que poden complir

- Resoldre un problema d'optimització quan cal aïllar una variable
- Aplicar el teorema de Rolle
- Aplicar el teorema del valor mitjà
- Aplicar el teorema del valor mitjà generalitzat
- Aplicar la regla de L'Hôpital en el càlcul de límits
- Resoldre indeterminacions dels tipus 1^{∞}, ∞^0 i 0^0
- Determinar una funció si se'n coneixen els extrems relatius i un punt pel qual passa
- Obtenir el valor d'un paràmetre perquè una funció sempre sigui còncava

- Representar la funció derivada d'una funció a partir de la seva gràfica
- Resoldre un problema d'optimització quan cal aïllar una variable
- Resoldre un problema d'optimització estudiant els extrems dels intervals
- Aplicar el teorema de Rolle a una funció definida a trossos
- Fer demostracions mitjançant el teorema de Rolle
- Determinar els paràmetres d'una funció per poder aplicar el teorema del valor mitjà
- Determinar un paràmetre per obtenir un valor donat com a resultat d'un límit

- Representar una funció polinòmica
- Representar una funció racional
- Representar una funció amb radicals
- Representar una funció exponencial
- Representar una funció logarítmica
- Representar una funció definida a trossos
- Calcular el domini d'una funció composta
- Estudiar la simetria d'una funció composta
- Calcular paràmetres desconeguts a partir de les seves asímptotes

- Estudiar la monotonia i la curvatura d'una funció a partir de la gràfica de la seva derivada
- Representar la gràfica d'una funció que compleixi unes condicions determinades
- Representar gràficament una funció trobant prèviament el valor dels seus paràmetres
- Representar la gràfica de funcions amb un factor exponencial o logarítmic
- Representar una funció simètrica
- Representar la gràfica d'una funció en què apareix un factor amb valor absolut

- Resoldre una integral racional en què el grau del numerador és més gran o igual que el grau del denominador
- Resoldre una integral mitjançant un canvi de variable
- Calcular una funció de la qual coneixem la derivada i un punt per on passa
- Calcular una primitiva que compleix una condició
- Resoldre les integrals del tipus $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{a^2 - g^2(x)}}$
- Calcular una integral utilitzant un canvi de variable conegut
- Resoldre una integral del tipus $\int \sqrt{a^2 - x^2}$

- Resoldre per parts una integral del tipus $\int e^{ax} \sin x$ o $\int e^{ax} \cos x$
- Resoldre per parts una integral del tipus $\int \ln[P(x)]$ on $P(x)$ és un polinomi de grau 1
- Resoldre per parts una integral del tipus $\int e^{ax+b} \cdot P(x)$, on $P(x)$ és un polinomi
- Resoldre una integral utilitzant un canvi de variable per transformar-la en polinòmica
- Resoldre una integral utilitzant un canvi de variable per transformar-la en racional

- Resoldre una integral definida per parts
- Resoldre una integral definida utilitzant un canvi de variable
- Calcular l'àrea limitada per una funció definida a trossos
- Calcular l'àrea sota una corba quan un límit d'integració és infinit

- Calcular l'àrea tancada sota una corba quan no es dóna un interval d'integració
- Determinar l'àrea d'una figura delimitada por una corba
- Calcular l'àrea tancada sota una corba expressada amb valor absolut i una recta

- Calcular el nombre total d'esdeveniments si el nombre de successos elementals és finit
- Trobar l'espai mostral d'un experiment amb una taula de doble entrada
- Calcular probabilitats experimentalment
- Calcular probabilitats utilitzant-ne les propietats

- Resoldre problemes de probabilitat amb esdeveniments compostos
- Calcular la probabilitat de la intersecció de successos utilitzant un diagrama d'arbre
- Utilitzar la regla del producte en experiments amb reemplaçament
- Calcular probabilitats utilitzant el teorema de la probabilitat total
- Calcular probabilitats utilitzant el teorema de Bayes

- Calcular la funció de distribució d'una variable aleatòria contínua a partir de la funció de densitat
- Calcular probabilitats mitjançant taules en variables aleatòries que segueixen una distribució normal
- Calcular probabilitats en una variable aleatòria binomial aproximant-la a una de normal
- Calcular els paràmetres d'una variable aleatòria que segueix una distribució binomial
- Determinar la funció de densitat d'una variable aleatòria contínua i trobar-ne la funció de distribució

- Calcular la probabilitat que $Z = N(0, 1)$ sigui més gran que un valor positiu
- Calcular la probabilitat que $Z = N(0, 1)$ sigui entre dos valors
- Calcular la probabilitat que $Z = N(0, 1)$ sigui més petit o més gran que un valor negatiu
- Calcular un punt si en coneixem la probabilitat
- Tipificar una variable aleatòria
- Calcular un dels paràmetres, coneixent-ne l'altre i una probabilitat
- Calcular la mitjana i la desviació típica si coneixem dues probabilitats
- Calcular probabilitats en variables aleatòries que segueixen una distribució binomial amb n gran

1 Experiments aleatoris

No te n'oblidis

Quan coneixem el resultat de l'experiment abans de dur-lo a terme, diem que és un experiment determinista.

Un **experiment aleatori** és aquell del qual no podem predir el resultat, és a dir, que depèn de la sort o l'atzar.

L'**espai mostral** d'un experiment aleatori està format per tots els resultats possibles que es poden produir en dur-lo a terme, i es denota E.

EXEMPLE

1 **Esbrina si aquests experiments són aleatoris. En cas afirmatiu, escriu-ne l'espai mostral:**

a) Mesurar-ne la temperatura de fusió del gel.

b) Llançar una moneda i anotar-ne el resultat.

a) En les mateixes condicions físiques, cada vegada que efectuem l'experiment, el resultat sempre serà el mateix: la temperatura de fusió del gel és de 0 °C. No és un experiment aleatori.

b) Sabem els resultats possibles, cara i creu; no obstant això, no podem predir el resultat que obtindrem després del llançament. És un experiment aleatori. L'espai mostral és E = {cara, creu}.

1.1. Mètodes de comptatge. Diagrama d'arbre

Els mètodes de comptatge són estratègies que s'utilitzen per determinar l'espai mostral d'un experiment aleatori.

El **diagrama d'arbre** és un mètode gràfic de comptatge que consisteix a marcar els resultats possibles d'un experiment aleatori com si fossin les branques d'un arbre. L'espai mostral s'obté a les branques finals.

SABER FER

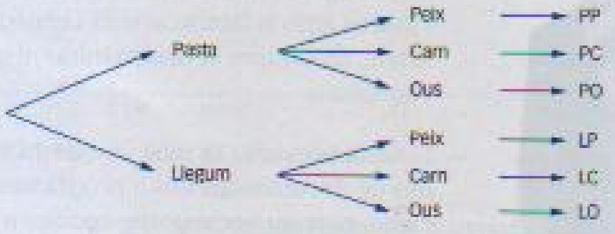
Determinar l'espai mostral amb un diagrama d'arbre

▶ **Si escollim a l'atzar un primer plat (pasta o llegum) i un segon plat (peix, carn o ous) de la carta d'un restaurant, quins són els menús possibles?**

PRIMER. Es fixa la primera possibilitat d'elecció.

En aquest cas, escollir el primer plat: pasta o llegum.

SEGON. S'hi afegeixen la resta de possibilitats i s'escriuen els resultats finals.



ACTIVITATS

1. En Pau escull a l'atzar entre les seves samarretes (vermella, blava o verda) i els seus pantalons (negres o blancs). Escriu les diferents possibilitats que té de vestir-se.

2. Per berenar, uns amics trien a l'atzar un entrepà de pernil, xoriç, formatge o truita, i un refresc de taronja, llimona o cola. Escriu l'espai mostral.

1.2. Variacions, permutacions i combinacions

- Les **variacions de n elements agafats de m en m, $V_{n,m}$**, s'utilitzen per comptar els diferents grups de m elements que es poden formar en conjunts de n elements ($m < n$). Els elements no es poden repetir i hi influeix l'ordre en què els col·loquem.

$$V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- Les **variacions amb repetició de n elements agafats de m en m, $VR_{n,m}$**, són variacions en què els elements es poden repetir:

$$VR_{n,m} = n^m$$

- Les **permutacions de n elements, P_n**, són variacions on $m = n$.

$$P_n = V_{n,n} = n!$$

EXEMPLES

2 **De quantes maneres diferents es pot format el pòdium d'una cursa de 100 metres llisos en què corren 8 atletes?**

Cal formar grups de 3 elements amb 8 atletes. En aquest cas, hi influeix l'ordre i els elements no es poden repetir → $V_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 336$

3 **Quantes travesses diferents es poden fer?**

Cal formar grups de 14 elements amb 3 elements diferents. En aquest cas, hi influeix l'ordre i els elements es poden repetir → $V_{3,14} = 3^{14} = 4.782.969$

4 **De quantes maneres diferents es poden asseure 3 persones en un banc?**

Cal formar grups de 3 persones amb 3 persones → $P_3 = 3! = 6$

Les **combinacions de n elements agafats de m en m, $C_{n,m}$**, s'utilitzen per comptar el nombre de grups diferents que es poden formar amb m elements diferents, escollits d'un conjunt de n elements. No hi influeix l'ordre i cap element no pot estar repetit.

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

EXEMPLE

5 **Quantes combinacions de 4 lletres es poden fer amb les lletres de MIQUEL?**

Les combinacions possibles de 6 lletres, agafades de 4 en 4, són:

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2!} = 15$$

ACTIVITATS

3. Quants nombres de cinc xifres es poden escriure amb els dígits de l'1 al 9 sense que es repeteixi cap xifra? I si les xifres es repeteixen?

4. Quants gelats de tres gustos diferents es poden servir en una gelateria que disposa de 12 gustos diferents?

Variaciones de n elementos tomados de m en m.

$n = \{1,2,3,4\}$

$V_{4,1} \to \overbrace{\{1,2,3,4\}}^{n} \Rightarrow V_{4,1} = 4 = \frac{4!}{(4-1)!} = 4 \Rightarrow \underline{V_{n,1} = n}$

$$V_{4,2} \to n\left\{\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\{1,2\}\ \{1,3\}\ \{1,4\}}^{n-1}} \\ \{2,1\} & \{2,3\} & \{2,4\} \\ \{3,1\} & \{3,2\} & \{3,4\} \\ \{4,1\} & \{4,2\} & \{4,3\} \end{array}\right. \Rightarrow \underline{V_{4,2}} = 12 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

$$\Rightarrow V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$V_{4,3} \to n\left\{\begin{array}{lll} \{1,2,*\}^{\times 2} & \{1,3,*\}^{\times 2} & \{1,4,*\}^{\times 2} \\ \{2,1,*\}^{\times 2} & \{2,3,*\}^{\times 2} & \{2,4,*\}^{\times 2} \\ \{3,A,B\}^{\times 2} & \{3,A,B\}^{\times 2} & \{3,A,B\}^{\times 2} \\ \{4,A,B\}^{\times 3 \times 2} & & \end{array}\right. \Rightarrow \underline{V_{4,3}} = \underset{n-1}{4\cdot 3}\cdot 2 = 24 \; \frac{4!}{(4-3)!} = 12$$

$n-2$

$A \in \{1,2,4\}$ $B \in \{1,2,4\}$

$$V_{4,4} \to n\left\{\begin{array}{l} \overbrace{\{1,2,3,4\}\ \{1,3,2,4\}\ \{1,2,4,3\}\ \{1,3,4,2\}\ \{1,4,2,3\}\ \{1,4,3,2\}}^{(n-1)(n-2) = 3\cdot 2 = 6} \\ \{2,A,B,C\}^{\times 6} \\ \{3,A,B,C\}^{\times 6} \\ \{4,A,B,C\}^{\times 6} \end{array}\right. \Rightarrow V_{4,4} = 24 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 24$$

$\{1\} \to V_{1,1} = 1$

$\{3,4\} \to V_{2,2} = V_{1,1}\cdot 2 = 1\cdot 2 = 2$

$\{3,4\}\ \{4,3\}$

$\{2,3,4\} \to V_{3,3} = V_{2,2}\cdot 3 = 2\cdot 3 = 6$

$$2\left\{\begin{array}{l} \{2,3,4\}\ \{3,2,4\}\ \{3,4,2\} \\ \underbrace{\{2,4,3\}\ \{4,2,3\}\ \{4,3,2\}}_{3} \end{array}\right.$$

$\{1,2,3,4\} \to V_{4,4} = V_{3,3}\cdot 4 = 2\cdot 3\cdot 4 = 24 \Rightarrow \underline{V_{n,n} = n!}$

$$\left.\begin{array}{l} \{1,2,3,4\}\ \{1,3,2,4\}\ \{1,3,4,2\}\ \times 4 \\ \{1,2,4,3\}\ \{1,4,2,3\}\ \{1,4,3,2\}\ \times 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} 12 \\ + \\ 12 \end{array}\right\} \underline{\underline{24}}$$

2 Esdeveniments. Operacions amb esdeveniments

- Un **esdeveniment (o succés) elemental** és cadascun dels resultats possibles de l'espai mostral.
- Un **esdeveniment compost** està format per dos o més successos elementals.
- Un **esdeveniment** és **segur** quan es produeix sempre, i un **esdeveniment** és **impossible** quan no passa mai.

Fixa-t'hi

Qualsevol esdeveniment compost es pot expressar com a unió dels seus successos elementals.

EXEMPLE

6 **Una urna conté 4 boles roges, 1 de negra i 2 de verdes. Considerem l'experiment aleatori d'agafar una bola a l'atzar i anotar-ne el color.**

a) **Descriu l'espai mostral i defineix-ne els esdeveniments elementals.**
b) **Escriu dos successos compostos.**
c) **Escriu un esdeveniment segur i un esdeveniment impossible.**

a) $E = \{R, N, V\}$, que té com a esdeveniments elementals $\{R\}$, $\{N\}$ i $\{V\}$.
b) A = «Treure una bola roja o verda» $= \{R, V\}$
B = «Treure una bola negra o verda» $= \{N, V\}$
c) Esdeveniment segur: C = «Treure una bola roja, negra o verda»
Esdeveniment impossible: D = «Treure una bola blava»

Operacions amb esdeveniments

Ho escrivim així

«Que passi A o B» $\rightarrow A \cup B$
«Que passi A i B» $\rightarrow A \cap B$

- La **unió de dos esdeveniments**, A i B, és un altre succés format pels esdeveniments elementals que hi ha a A o a B, i s'escriu $A \cup B$.
- La **intersecció de dos esdeveniments**, A i B, és un altre succés format pels esdeveniments elementals comuns de A i de B, i s'escriu $A \cap B$.

EXEMPLE

7 **Si tirem un dau, expressa aquests esdeveniments com a unió o intersecció:**

a) A = «Obtenir un nombre parell o més gran que 3» $= \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$
b) B = «Obtenir un múltiple de 2 o un divisor de 4» $= \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 4, 6\}$
c) C = «Obtenir un nombre parell i més gran que 3» $= \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$
d) D = «Obtenir un múltiple de 2 i divisor de 4» $= \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 4\} = \{2, 4\}$

ACTIVITATS

5. En una fruitera hi ha taronges, pomes, plàtans i prunes. S'escull una peça a l'atzar i s'anota quina fruita és.
a) Escriu l'espai mostral associat, un esdeveniment segur i un altre d'impossible.
b) Troba i descriu dos successos compostos.

6. Es fa girar una ruleta dividida en 12 sectors numerats de l'1 al 12 i s'anota el nombre on s'ha aturat. Expressa aquests esdeveniments com a unió o intersecció:
a) A = «Obtenir un nombre múltiple de 3 o de 7»
b) B = «Obtenir un nombre múltiple de 2 i de 3»

Si la intersecció de dos esdeveniments és l'esdeveniment impossible, és a dir, $A \cap B = \emptyset$, diem que són **esdeveniments incompatibles**. En cas contrari, diem que són compatibles.

Fixa-t'hi

Els esdeveniments incompatibles no es poden produir simultàniament.

Els esdeveniments elementals sempre són incompatibles entre ells.

EXEMPLE

8 **Si tirem un dau i anotem la puntuació obtinguda, esbrina si aquests esdeveniments són compatibles o incompatibles.**

A = «Obtenir un nombre senar» = $\{1, 3, 5\}$

B = «Obtenir un múltiple de 3» = $\{3, 6\}$

C = «Obtenir un múltiple de 2» = $\{2, 4, 6\}$

Els esdeveniments A i B són compatibles, ja que $A \cap B = \{3\}$.

Els successos A i C són incompatibles, ja que $A \cap C = \emptyset$.

Els esdeveniments B i C són compatibles, ja que $B \cap C = \{6\}$.

L'**esdeveniment contrari** o **complementari** d'un esdeveniment A és un altre succés, que escrivim com a $\overline{A}$, format per tots els esdeveniments elementals de l'espai mostral que no es troben a A.

La **diferència de dos esdeveniments**, $A - B$, és la intersecció del primer succés amb el contrari del segon: $A - B = A \cap \overline{B}$.

Fixa-t'hi

La unió d'un esdeveniment i el seu contrari és l'espai mostral.

$$A \cup \overline{A} = E$$

La intersecció d'un esdeveniment i el seu contrari és el conjunt buit.

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Propietats de les operacions amb esdeveniments

- El contrari de la unió és la intersecció dels contraris: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- El contrari de la intersecció és la unió dels contraris: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- El contrari del succés contrari coincideix amb el succés de partida: $\overline{\overline{A}} = A$

EXEMPLE

9 **En tirar un dau, considerem els successos A = «Obtenir un nombre senar» i B = «Obtenir un múltiple de 3». Comprova que es compleix el següent:**

a) $A - B = A \cap \overline{B}$ **b)** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ **c)** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ **d)** $\overline{\overline{A}} = A$

$A = \{1, 3, 5\} \rightarrow \overline{A} = \{2, 4, 6\}$ $\quad A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$

$B = \{3, 6\} \rightarrow \overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$ $\quad A \cap B = \{3\}$

a) $A - B = \{1, 5\}$ $\quad A \cap \overline{B} = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 5\}$

b) $\overline{A \cup B} = \{2, 4\}$ $\quad \overline{A} \cap \overline{B} = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 4, 5\} = \{2, 4\}$

c) $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ $\quad \overline{A} \cup \overline{B} = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

d) $\overline{\overline{A}} = \{1, 3, 5\} = A$

ACTIVITATS

7. S'extreu una carta de la baralla espanyola. Raona si els esdeveniments A, B, C i D són compatibles o incompatibles.

A = «Treure un as»

B = «Treure un basto»

C = «Treure un cavall»

D = «Treure una figura»

8. Per postres podem triar pomes vermelles o verdes, prunes vermelles, peres verdes o grogues, o plàtans. Tenim els successos A = «Triar fruita vermella», B = «Triar poma» i C = «Triar plàtan o pera».

a) Troba $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, A - B, B - C, A \cap B$ i $A \cap \overline{C}$.

b) Comprova que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ i que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3 Freqüència i probabilitat

Quan es duu a terme un experiment aleatori, la **freqüència relativa d'un esdeveniment** és el quocient entre el nombre de vegades que es produeix aquest succés i el nombre de vegades que s'ha efectuat l'experiment.

EXEMPLE

10 **Llancem una moneda 100 vegades i s'obté cara 42 vegades. Quina és la freqüència relativa de l'esdeveniment A = «Que surti cara»? I la freqüència relativa de l'esdeveniment B = «Que surti creu»?**

La freqüència relativa de l'esdeveniment A és $f(A) = \frac{42}{100} = 0{,}42$.

La freqüència relativa de l'esdeveniment B és $f(B) = \frac{58}{100} = 0{,}58$.

La probabilitat es pot definir com el nombre cap al qual tendeixen les freqüències relatives d'un esdeveniment quan l'experiment aleatori es repeteix un nombre elevat de vegades.

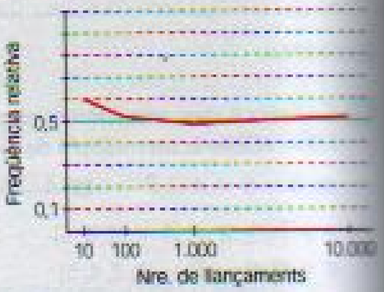
Aquesta propietat es coneix com la **llei dels grans nombres**.

EXEMPLE

11 **Calcula la probabilitat que, en llançar una moneda, surti cara.**

La taula mostra les cares obtingudes després de fer l'experiment diverses vegades.

Nre. de llançaments	Nre. de cares	Freqüència relativa
10	6	0,6
100	52	0,52
1.000	489	0,489
10.000	5.009	0,5009



Quan es representen els resultats en un gràfic, es comprova que les freqüències relatives s'apropen a 0,5. Així, la probabilitat d'obtenir cara és 0,5.

ACTIVITATS

9. Quatre amics llancen una moneda 100 vegades cadascun d'ells i n'anoten els resultats. Raona si la moneda està trucada o no, i calcula la freqüència relativa i la probabilitat de l'esdeveniment «Que surti cara».

	Amic 1	Amic 2	Amic 3	Amic 4
Cara	70	68	69	72
Creu	30	32	31	28

10. A partir de les dades de la taula, calcula la probabilitat que, en tirar un dau, surti un 2.

Nre. de llançaments	«Que surti 2»
100	20
5	80
1.000	168
10.000	1.660

4 Propietats de la probabilitat

La probabilitat té les propietats següents:

- La probabilitat de qualsevol esdeveniment sempre és més gran o igual que 0 i més petita o igual que 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- La probabilitat de l'esdeveniment segur és 1 i la probabilitat de l'esdeveniment impossible és 0.

$$P(E) = 1 \qquad P(\varnothing) = 0$$

- La probabilitat de qualsevol succés és igual a 1 menys la probabilitat del seu contrari.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

- Quan dos esdeveniments són incompatibles, la probabilitat de la seva unió és la suma de les seves probabilitats.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Per a dos successos qualssevol, A i B, sempre es verifica que la probabilitat de la seva unió és igual a la suma de les seves probabilitats menys la probabilitat de la seva intersecció.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

EXEMPLE

12 **La probabilitat que una persona porti ulleres és 0,6; la probabilitat que tingui els ulls clars és 0,6 i la probabilitat que porti ulleres i tingui els ulls clars és 0,52. Calcula la probabilitat que una persona escollida a l'atzar:**

a) No porti ulleres.

b) Porti ulleres o tingui els ulls clars.

c) No porti ulleres o no tingui els ulls clars.

Es consideren els esdeveniments següents:

A = «Portar ulleres»

B = «Tenir els ulls clars»

$A \cap B$ = «Portar ulleres i tenir els ulls clars»

S'escriuen les probabilitats conegudes.

$$P(A) = 0{,}6 \qquad P(B) = 0{,}6 \qquad P(A \cap B) = 0{,}52$$

a) «No portar ulleres» = $\overline{A}$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

b) «Portar ulleres o tenir els ulls clars» = $A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}6 - 0{,}52 = 0{,}68$$

c) «No portar ulleres o no tenir els ulls clars» = $\overline{A} \cup \overline{B}$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) \underset{\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}}{=} P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$$

ACTIVITATS

11. Dels esdeveniments A i B d'un experiment aleatori se sap que $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ i $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{3}$. Calcula.

a) $P(A \cup B)$ b) $P(A \cap B)$ c) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

12. Dels successos A i B d'un experiment aleatori se sap que $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$ i $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calcula.

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

5 Regla de Laplace

Un **experiment** és **regular** quan tots els esdeveniments elementals tenen la mateixa probabilitat, és a dir, són esdeveniments equiprobables.

No te n'oblidis

Per aplicar la regla de Laplace els esdeveniments elementals han de ser equiprobables.

Regla de Laplace. En un experiment aleatori regular, la probabilitat d'un esdeveniment A es pot calcular d'aquesta manera:

$$P(A) = \frac{\text{nre. de casos favorables a } A}{\text{nre. de casos possibles}}$$

SABER FER

Calcular probabilitats utilitzant la regla de Laplace

▶ **Una urna conté 5 boles blaves, 2 de vermelles i 3 de verdes. Si es treu una bola a l'atzar, quina probabilitat hi ha que sigui verda?**

PRIMER. Es comprova si l'experiment és regular.

Hi ha la mateixa probabilitat de treure qualsevol bola; per tant, és un experiment regular.

SEGON. Es determina el nombre de casos possibles, és a dir, el nombre d'esdeveniments elementals que hi ha a l'espai mostral i el de casos favorables al succés, o sigui, els esdeveniments elementals que formen el succés.

Casos possibles ⟶ Nombre de boles que hi ha a l'urna = 10

Casos favorables → Nombre de boles verdes = 3

TERCER. S'aplica la regla de Laplace per calcular la probabilitat.

$$P(\text{«Treure bola verda»}) = \frac{\text{nre. de casos favorables}}{\text{nre. de casos possibles}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Fixa-t'hi

En la regla de Laplace, el nombre de casos favorables és el nombre de successos elementals que conté l'esdeveniment, i el nombre de casos possibles és el nombre total de successos elementals.

Els mètodes de comptatge ens ajuden a determinar el nombre de casos possibles d'un experiment aleatori.

EXEMPLE

13 Troba la probabilitat d'encertar els 6 nombres en el sorteig de la Lotto 6/49.

A la Lotto 6/49 s'extreuen 6 boles d'una urna que conté 49 boles amb la mateixa probabilitat de sortir, i per això és un experiment regular i s'hi pot aplicar la regla de Laplace.

El nombre de casos possibles són les combinacions de 49 elements, agafats de 6 en 6, perquè l'ordre no hi influeix ni es poden repetir els elements.

$$P(\text{«Premi»}) = \frac{\text{nre. de casos favorables}}{\text{nre. de casos possibles}} = \frac{1}{C_{49,6}} = \frac{1}{13.983.816} = 0{,}0000000715$$

ACTIVITATS

13. S'extreu una carta de la baralla espanyola. Calcula la probabilitat que sigui:

a) Una espasa.

b) Una figura.

c) Una figura de bastos.

d) L'as d'oros o de copes.

14. D'una urna amb vuit boles numerades de l'1 al 8, se n'extreuen dues consecutivament i s'anota el nombre de dues xifres que es forma amb el dígit de cada bola.

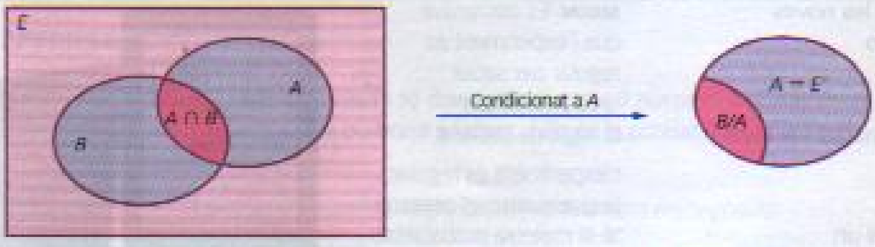
Calcula la probabilitat que el nombre sigui múltiple de 5.

6 Probabilitat condicionada

La probabilitat d'un esdeveniment *B*, quan sabem que s'ha produït un altre esdeveniment *A*, s'anomena **probabilitat condicionada**.

S'escriu *P(B/A)* i es llegeix «probabilitat de *B* condicionat a *A*».

Quan es calculen probabilitats condicionades amb l'ajuda de la regla de Laplace, cal tenir en compte que el nou espai mostral, *E'*, coincideix amb el succés *A*.



$$P(B) = \frac{\text{nre. de casos en } B}{\text{nre. de casos en } E} \xrightarrow{\text{Condicionat a } A} P(B/A) = \frac{\text{nre. de casos de } B \text{ en } E'}{\text{nre. de casos en } E'} = \frac{\text{nre. de casos en } A \cap B}{\text{nre. de casos en } A}$$

EXEMPLE

14 En un estudi sobre malalties cardíaques s'ha arribat a la conclusió que es poden donar per factors diversos. Analitzant possibles factors de risc, s'ha establert que la probabilitat de patir hipertensió arterial és del 0,2 i la de patir totes dues malalties és del 0,05. Si es tria una persona a l'atzar, quina probabilitat hi ha que pateixi alguna malaltia cardíaca sabent que presenta problemes d'hipertensió?

L'experiment és regular, ja que qualsevol persona té la mateixa probabilitat de ser escollida. Així, podem utilitzar la regla de Laplace.

Considerem aquests esdeveniments:

A = «Patir hipertensió arterial» → $P(A) = 0{,}2$

B = «Patir alguna malaltia cardíaca»

$A \cap B$ = «Patir hipertensió arterial i malaltia cardíaca» → $P(A \cap B) = 0{,}05$

$$P(B/A) = \frac{\text{nre. de persones amb les dues malalties}}{\text{nre. de persones amb hipertensió}} = \frac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}25$$

Fixa-t'hi

La probabilitat condicionada es pot calcular com:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ACTIVITATS

15. Després d'enquestar 30 persones sobre les seves preferències a l'hora d'escollir la destinació per passar les vacances, es tenen aquests resultats: 17 prefereixen la platja; 8, la muntanya, i 5 es reparteixen les vacances entre els dos llocs. Si d'entre aquestes 30 persones, n'escollim una a l'atzar, calcula la probabilitat que:

a) Passi les vacances a la platja, sabent que també les gaudeix a la muntanya.

b) Passi les vacances a la platja, sabent que no les reparteix amb la muntanya.

16. S'escull a l'atzar una bola acolorida i numerada d'una capsa amb la composició que es mostra en la taula. Calcula les probabilitats que es demanen.

	Vermell	Blau	Blanc
Numerada amb 1	2	4	1
Numerada amb 2	3	2	3

a) *P* (1/«Vermell») b) *P* (2/«Blau») c) *P* (2/«Blanc»)

7 Taules de contingència

Un mètode per calcular probabilitats condicionades o d'esdeveniments compostos és organitzar les dades en una taula de doble entrada que s'anomena **taula de contingència.**

SABER FER

Elaborar una taula de contingència i utilitzar-la per calcular probabilitats

▶ **S'ha elaborat un estudi sobre l'ús de les noves tecnologies entre els joves, i per fer-lo s'ha preguntat a 43 nois i 57 noies. D'entre els joves enquestats, 30 nois i 45 noies habitualment utilitzen ordinador i la resta utilitzen tauletes.**

Elabora una taula de contingència i calcula la probabilitat que, si s'escull un dels joves a l'atzar:

a) Habitualment utilitzi tauleta.

b) Sigui noia, sabent que utilitza tauleta.

c) Utilitzi ordinador, sabent que és noi.

PRIMER. S'organitzen les dades en una taula de doble entrada completant les cel·les que falten, de manera que les sumes de les files i les columnes donin com a resultat els totals corresponents.

$57 - 45 = 12$ $\quad 43 - 30 = 13$

$45 + 30 = 75$ $\quad 12 + 13 = 25$

	Noies	Nois	Total
Ordinador	45	30	75
Tauleta	12	13	25
Total	57	43	100

SEGON. Es comprova que l'experiment és regular per saber si es pot utilitzar la regla de Laplace.

L'experiment és regular, ja que qualsevol persona té la mateixa probabilitat de ser escollida.

TERCER. Es defineixen els esdeveniments coneguts.

A = «Ser noia»

B = «Ser noi»

C = «Utilitzar ordinador»

D = «Utilitzar tauleta»

QUART. Es calculen les probabilitats que es demanen.

a) $(D) = \dfrac{\text{nre. de persones amb tauletes}}{\text{nre. de persones total}} = \dfrac{25}{100} = 0{,}25$

Quan es calculen probabilitats condicionades l'espai mostral es redueix al grup d'individus corresponent.

b) $P(A/D) = \dfrac{\text{nre. de noies amb tauletes}}{\text{nre. de persones amb tauletes}} = \dfrac{12}{25} = 0{,}48$

c) $P(C/B) = \dfrac{\text{nre. de nois amb ordinadors}}{\text{nre. de nois}} = \dfrac{30}{43} = 0{,}698$

ACTIVITATS

17. En una enquesta es pregunta si es viu o no a la mateixa localitat on es treballa.

	Homes	Dones	Total
Viu on treballa	10	20	30
No viu on treballa	15	10	25
Total	25	30	55

Si li fem la pregunta a una de les persones enquestades escollida a l'atzar, calcula la probabilitat que:

a) Visqui on treballa.

b) Sabent que és dona, no visqui on treballa.

c) Visqui on treballa, sabent que és home.

18. Copia a la llibreta i completa la taula següent, en què es mostra el nombre de nois i noies que habitualment practiquen un esport i els que no ho fan.

	Noi	Noia	Total
Practica esport	10		
No practica esport		6	
Total		14	30

Si s'escull una persona a l'atzar d'aquest grup, calcula la probabilitat que sigui noia i no practiqui un esport de forma habitual.

8 Dependència i independència de successos

Dos successos, A i B, són **dependents** quan el fet que en passi un influeix perquè es produeixi l'altre. Si A i B són dependents es compleix que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Aquesta manera de calcular la probabilitat de la intersecció de dos esdeveniments s'anomena **regla del producte**.

EXEMPLE

15 En una cafeteria hi ha 12 homes i 10 dones. D'aquests, 7 homes i 4 dones estan prenent cafè. Si s'escull una persona a l'atzar, calcula la probabilitat que sigui dona i estigui prenent cafè.

Com que es tracta d'esdeveniments dependents, considerem els següents:

A = «Ser dona» → $P(A) = \frac{10}{22} = 0{,}455$

B/A = «Prendre cafè, sabent que és dona» → $P(B/A) = \frac{4}{10} = 0{,}4$

$A \cap B$ = «Ser dona i prendre cafè» → $P(A \cap B) = \frac{10}{22} \cdot \frac{4}{10} = 0{,}182$

Dos esdeveniments, A i B, són **independents** quan el fet que en passi un no influeix perquè tingui lloc l'altre.

Si A i B són independents es compleix que $P(B) = P(B/A)$; per tant:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

EXEMPLE

16 Si agafem, amb reemplaçament, dues cartes d'una baralla espanyola, calcula la probabilitat que totes dues siguin de copes.

Es tracta d'esdeveniments independents, perquè, com que és una extracció amb reemplaçament, la primera carta es torna a la baralla.

A = «Treure copes a la primera extracció» ⟶ $P(A) = \frac{10}{40} = 0{,}25$

B = «Treure copes a la segona extracció» ⟶ $P(B) = \frac{10}{40} = 0{,}25$

$A \cap B$ = «Treure copes a les dues extraccions» → $P(A \cap B) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = 0{,}0625$

Fixa-t'hi

No confonguis successos independents amb successos incompatibles.

Independents:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

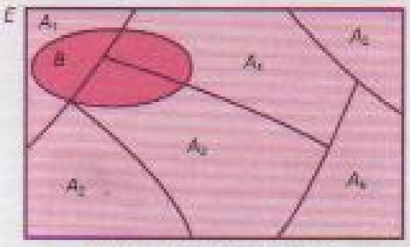
Incompatibles:
$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$

ACTIVITATS

19. En un grup de 15 homes i 18 dones, 6 homes i 4 dones parlen dos idiomes estrangers. Si s'escull una persona a l'atzar del grup, calcula la probabilitat que sigui dona i no parli dos idiomes estrangers.

20. En un grup de Batxillerat format per 20 nois i 12 noies, 9 nois i 7 noies van a classe amb transport públic. Calcula la probabilitat que un alumne qualsevol sigui noi i faci servir el transport públic.

9 Teorema de la probabilitat total



$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 = E$

$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_4) \cup (B \cap A_3)$

Teorema de la probabilitat total

Si tenim una sèrie d'esdeveniments, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tals que:

- Són incompatibles entre ells: $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$.
- La seva unió és l'espai mostral: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$.

Aleshores podem calcular la probabilitat de qualsevol succés B com a:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Fixa-t'hi

Per trobar esdeveniments incompatibles la unió dels quals sigui el total es pot prendre un esdeveniment i el seu contrari.

$$A \cup \overline{A} = E$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

EXEMPLE

17 **En un centre de salut la distribució de pacients segons l'edat és la que surt en la taula. També s'hi mostra el percentatge de pacients de cada grup que presenten malalties cròniques.**

	Adults	Joves	Nens
Edat	55 %	30 %	15 %
Malaltia crònica	35 %	18 %	9 %

Si s'escull un pacient a l'atzar, quina probabilitat hi ha que pateixi una malaltia crònica?

Es considera el succés A_i = «Grup d'edat del pacient», és a dir:

A_1 = «Pertànyer al grup d'adults»

A_2 = «Pertànyer al grup de joves»

A_3 = «Pertànyer al grup de nens»

Un pacient només pertany a un grup → $A_i \cap A_j = \emptyset$

Qualsevol pacient pertany a un dels grups → $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$

Els successos compleixen les condicions del teorema de la probabilitat total.

Per tant, considerant el succés B = «Patir malaltia crònica», es té:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3) =$$
$$= 0{,}55 \cdot 0{,}35 + 0{,}3 \cdot 0{,}18 + 0{,}15 \cdot 0{,}09 = 0{,}26$$

La probabilitat d'escollir un pacient que pateixi una malaltia crònica és del 26 %.

ACTIVITATS

21. La taula següent recull el percentatge d'alumnes que han acabat 2n de Batxillerat amb totes les matèries aprovades en cadascun dels tres grups d'un centre escolar determinat.

Si s'escull un alumne de 2n de Batxillerat a l'atzar, calcula la probabilitat que hagi aprovat totes les matèries.

	Grup 1	Grup 2	Grup 3
Nre. d'alumnes	32	35	31
Tot aprovat	68 %	72 %	84 %

22. La bossa B_1 té 5 caramels de maduixa i 3 de menta. La bossa B_2 en té 6 de maduixa i 2 de menta. S'escull una bossa a l'atzar i se n'extreu un caramel.

Calcula la probabilitat que el caramel extret sigui de maduixa.

10 Teorema de Bayes

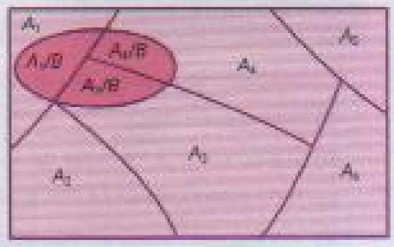
Teorema de Bayes

Si tenim una sèrie d'esdeveniments, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tals que:

- Són incompatibles entre ells: $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$.
- La seva unió és l'espai mostral: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$.

Sabent que s'ha produït un esdeveniment B, es compleix que:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)\,P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B/A_i)}$$



Si s'ha produït B, trobem: (A_1/B), (A_4/B) i (A_3/B)

EXEMPLE

18 **En un centre de salut la distribució de pacients segons l'edat és la que surt en la taula. També s'hi mostra el percentatge de pacients de cada grup que presenten malalties cròniques.**

	Adults	Joves	Nens
Edat	55 %	30 %	15 %
Malaltia crònica	35 %	18 %	9 %

Si, en escollir un pacient, aquest pateix una malaltia crònica, calcula la probabilitat que sigui un adult.

Considerem l'esdeveniment A_i = «Grup d'edat del pacient».

Un pacient només pertany a un grup $\rightarrow A_i \cap A_j = E$

Qualsevol pacient pertany a un dels grups $\rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$

Els esdeveniments compleixen les condicions del teorema de Bayes.

Per tant, si considerem el succés B = «Patir una malaltia crònica», hem de calcular la probabilitat que sigui adult sabent que pateix una malaltia crònica:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) + P(A_3)\cdot P(B/A_3)} =$$

$$= \frac{0{,}55\cdot 0{,}35}{0{,}55\cdot 0{,}35 + 0{,}3\cdot 0{,}18 + 0{,}15\cdot 0{,}09} = \frac{0{,}193}{0{,}26} = 0{,}742$$

La probabilitat que el pacient amb malaltia crònica sigui un adult és del 74,2 %.

No te n'oblidis

El teorema de Bayes calcula probabilitats després de fer l'experiment, és a dir, s'ocupa d'estudiar la probabilitat *a posteriori*.

ACTIVITATS

23. Si s'escull un alumne de 2n de Batxillerat a l'atzar, i, sabent que no ha aprovat totes les matèries, calcula la probabilitat que sigui del grup 3.

	Grup 1	Grup 2	Grup 3
Nre. d'alumnes	32	35	31
Tot aprovat	68 %	72 %	84 %

24. Tenim dues bosses de caramels:

- La bossa B_1 té 5 caramels de maduixa i 3 de menta.
- La bossa B_2 en té 6 de maduixa i 2 de menta.

S'escull una de les dues bosses a l'atzar i se n'extreu un caramel. Si sabem que el caramel extret és de menta, calcula la probabilitat que s'hagi extret de la bossa B_1.

SABER FER

Mètodes de comptatge

Calcular el nombre de possibilitats utilitzant mètodes de comptatge

Calcula el nombre de possibilitats.

a) Si es trien 3 models de telèfon de 7 de possibles.

b) Si s'omple una travessa de 14 partits.

c) Si es col·loquen 6 plantes en 6 testos.

d) Si s'escullen claus de tres lletres amb les lletres que formen la paraula CALOR.

PRIMER. Es comprova si l'ordre influeix en el nombre de possibilitats, és a dir, si dos grups amb els mateixos elements són diferents. Quan l'ordre no hi influeix, es calcula utilitzant combinacions.

a) L'ordre no hi influeix. Es tracta de combinacions de 7 elements agafats de 3 en 3.

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = 35$$

Hi ha 35 possibilitats diferents de triar 3 telèfons de 7.

SEGON. Quan l'ordre hi influeix, es comprova si els elements es poden repetir. En cas afirmatiu, el nombre de possibilitats es calcula utilitzant variacions amb repetició.

b) Tenim 3 elements possibles i volem fer grups de 14, i això vol dir que s'han de repetir. Es tracta de variacions amb repetició de 3 elements agafats de 14 en 14.

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4.782.969$$

Hi ha 4.782.969 travesses diferents.

TERCER. Quan l'ordre hi influeix i els elements no es repeteixen, es comprova si hi intervenen tots els elements, és a dir, si els grups tenen el nombre màxim d'elements. En aquest cas, les possibilitats es calculen utilitzant permutacions.

c) Hi intervenen tots els elements; per tant, es tracta de permutacions de 6 elements.

$$P_6 = 6! = 720$$

Hi ha 720 maneres diferents de col·locar 6 plantes en 6 testos.

QUART. Si no hi intervenen totes les possibilitats, s'utilitzen variacions sense repetició.

d) No hi intervenen tots els elements, ja que les claus estan formades per 3 lletres amb les 5 que formen la paraula CALOR; així doncs, es tracta de variacions de 5 elements agafats de 3 en 3.

$$V_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

Es poden formar 60 claus diferents.

PRACTICA

25. **Calcula el nombre de possibilitats.**

a) Si es barregen 2 colors diferents i es tenen 5 pots de pintura de diversos colors.

b) Si s'escriuen els nombres de tres xifres iguals o distintes amb els dígits 1, 2, 3, 4 i 5.

Esdeveniments

Calcular el nombre total d'esdeveniments si el nombre de successos elementals és finit

Troba el nombre total d'esdeveniments de l'experiment que consisteix a tirar un dau.

PRIMER. Es troba el nombre d'esdeveniments elementals.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ Hi ha 6 esdeveniments elementals.

SEGON. Es determinen els esdeveniments que contenen exactament 1, 2, 3, ..., n successos elementals.

$0 \rightarrow 1 \rightarrow \{\emptyset\}$

$1 \rightarrow C_{6,1} = \binom{6}{1} = 6$ $\qquad$ $4 \rightarrow C_{6,4} = \binom{6}{4} = 15$

$2 \rightarrow C_{6,2} = \binom{6}{2} = 15$ $\qquad$ $5 \rightarrow C_{6,5} = \binom{6}{5} = 6$

$3 \rightarrow C_{6,3} = \binom{6}{3} = 20$ $\qquad$ $6 \rightarrow 1 \rightarrow \{E\}$

TERCER. Se sumen totes les quantitats.

Per les propietats de les combinacions sabem:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 2^6 = 64$$

PRACTICA

26. **Troba el nombre total d'esdeveniments de l'experiment que consisteix a escollir una bola d'una bossa on hi ha cinc boles de colors diferents i anotar-ne el color.**

27. **Fes l'activitat anterior sabent que a l'interior de la bossa només hi ha boles de tres colors diferents.**

Espai mostral

Trobar l'espai mostral d'un experiment amb una taula de doble entrada

Es llancen una moneda i un dau i s'anoten els resultats obtinguts. Descriu l'espai mostral associat amb aquest experiment aleatori.

PRIMER. Es calculen els espais mostrals dels experiments més simples.

«Llançar una moneda» = {C, +}
«Llançar un dau» = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

SEGON. S'elabora una taula de doble entrada, anotant els esdeveniments elementals de cada experiment.

	1	2	3	4	5	6
C	C1	C2	C3	C4	C5	C6
+	+1	+2	+3	+4	+5	+6

TERCER. El conjunt de les caselles interiors forma l'espai mostral.

$E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, +1, +2, +3, +4, +5, +6\}$

PRACTICA

28. Troba l'espai mostral de l'experiment que consisteix a tirar un dau i treure una bola d'una bossa on hi ha boles vermelles i negres.

29. Extreus a l'atzar un llapis de color d'un estoig que en té dos de blaus, un de verd i un de vermell, i escrius el teu nom en un tros de paper tret, sense mirar, d'una bossa de tela que conté paper normal i reciclat. Determina l'espai mostral d'aquest experiment.

Freqüència i probabilitat

Calcular probabilitats experimentalment

En un sac tenim barrejats 50 kg de mongetes blanques i mongetes vermelles. Explica com es calcula la probabilitat que, en treure una mongeta del sac, sigui vermella.

PRIMER. S'efectua l'experiment moltes vegades i s'anoten els resultats obtinguts.
S'extreuen mostres de mongetes i s'apunta quantes són vermelles.

Nre. de mongetes	Nre. de mongetes vermelles (f_i)	Freqüència relativa (h_i)
10	3	0,3
100	32	0,32
1.000	316	0,316

SEGON. S'observa la tendència de les freqüències relatives quan augmenta el nombre d'observacions, ja que s'aniran apropant al veritable valor de la probabilitat.
Les freqüències relatives tendeixen a 0,3; per tant, assignarem aquesta probabilitat a l'esdeveniment «Extreure una mongeta vermella».

P(«Extreure una mongeta vermella») = 0,3

PRACTICA

30. En una urna no transparent hi ha targetes de diferents colors, entre les quals, de color blanc. Amb les dades de la taula, indica quina probabilitat assignaries al succés «Extreure una targeta de color blanc».

Targetes extretes	10	50	75	100	300	500
Targetes blanques	2	9	15	21	62	95

Propietats de la probabilitat

Calcular probabilitats utilitzant-ne les propietats

En una competició de natació, el 65 % dels assistents són menors de 30 anys, el 53 % són noies i el 88 % són noies o menors de 30 anys.

Calcula la probabilitat d'aquests esdeveniments:

a) Ser noia i menor de 30 anys. **b)** Ser noi.

PRIMER. S'expressa l'enunciat en termes d'esdeveniments i de la probabilitat que tinguin lloc.

A = «Ser menor de 30 anys» → $P(A) = 0{,}65$
B = «Ser noia» → $P(B) = 0{,}53$
$A \cup B$ = «Ser menor de 30 anys o noia» → $P(A \cup B) = 0{,}88$

SEGON. S'escriu cada succés en funció de A i B.

a) Ser noia i menor de 30 anys = $A \cap B$ b) Ser noi = $\overline{B}$

TERCER. Es calcula la probabilitat aplicant les propietats.

a) $0{,}88 = 0{,}65 + 0{,}53 - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = 0{,}3$
El 30 % són noies menors de 30 anys.

b) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}53 = 0{,}47$ → El 47 % són nois.

PRACTICA

31. La probabilitat que tingui lloc el contrari d'un succés A és $\frac{1}{3}$, la probabilitat d'un esdeveniment B és $\frac{3}{4}$ i la probabilitat que els successos A i B es produeixin alhora és $\frac{5}{8}$. Determina la probabilitat que no es verifiqui A i no es verifiqui B.

Probabilitat condicionada

Resoldre problemes de probabilitat amb esdeveniments compostos

En un hospital, el 35 % dels malalts pateix la malaltia A; el 20 %, la malaltia B, i el 10 %, totes dues malalties. S'escull un pacient a l'atzar.

a) Troba la probabilitat que no estigui malalt.

b) Si té la malaltia B, quina probabilitat hi ha que no pateixi la malaltia A?

PRIMER. Es defineixen els esdeveniments i la seva probabilitat.

A = «Patir la malaltia A»

B = «Patir la malaltia B»

$A \cap B$ = «Patir totes dues malalties»

$P(A) = 0{,}35 \quad P(B) = 0{,}2 \quad P(A \cap B) = 0{,}1$

SEGON. S'organitzen les dades en una taula i es calculen les probabilitats que demana l'enunciat.

	B	$\overline{B}$	
A	10	25	35
$\overline{A}$	10	55	65
	20	80	100

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{55}{100} = 0{,}55$

b) $P(\overline{A}/B) = \dfrac{10}{20} = 0{,}5$

PRACTICA

32. En un centre escolar el 40 % dels alumnes pertany al grup de teatre, el 70 % escriu a la revista escolar i el 30 % duu a terme les dues activitats. Si s'escull un alumne a l'atzar, troba la probabilitat que:

a) No faci cap de les dues activitats.

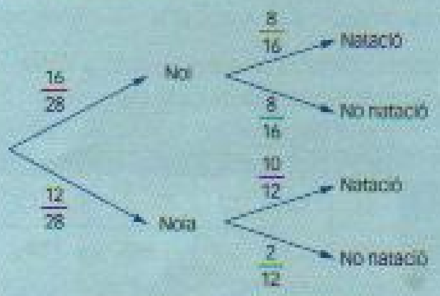
b) Si escriu a la revista escolar, no faci teatre.

Regla del producte

Calcular la probabilitat de la intersecció de successos utilitzant un diagrama d'arbre

En un poliesportiu hi ha 16 nois i 12 noies. D'aquests, 8 nois i 10 noies estan assistint a classe de natació. Escull una persona a l'atzar i calcula la probabilitat que sigui noi i practiqui natació.

PRIMER. S'elabora un diagrama d'arbre, posant a cada branca les probabilitats corresponents.



SEGON. S'escull la branca de l'arbre necessària per calcular la probabilitat que es demana i s'aplica la regla del producte.

$$P(\text{«Noi»} \cap \text{«Natació»}) = \frac{16}{28} \cdot \frac{8}{16} = 0{,}286$$

PRACTICA

33. Es tira un dau. Si surt un múltiple de 3 es llança una moneda; en cas contrari s'extreu una carta de la baralla espanyola i s'anota el coll a què pertany. Calcula la probabilitat:

a) D'obtenir un múltiple de 3 i creu.

b) D'obtenir un no múltiple de 3 i bastos.

Regla del producte

Utilitzar la regla del producte en experiments amb reemplaçament

Un experiment consisteix a agafar quatre cartes, amb reemplaçament, d'una baralla. Calcula la probabilitat que la primera sigui d'oros; la segona, de copes; la tercera, un rei, i la quarta, un cavall.

PRIMER. Es descompon el succés en d'altres de més simples.

A = «Obtenir oros a la primera carta»

B = «Obtenir copes a la segona carta»

C = «Obtenir un rei a la tercera carta»

D = «Obtenir un cavall a la quarta carta»

L'esdeveniment que cal calcular és la intersecció dels quatre anteriors: $A \cap B \cap C \cap D$

SEGON. S'aplica la regla del producte tenint en compte si els esdeveniments són independents o no. En cas afirmatiu, es calcula la probabilitat de cada succés per aplicar la regla del producte.

Com que hi ha reemplaçament, el que passa en una extracció no afecta la resta; així, són successos independents. Per tant:

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) =$$
$$= \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1.600}{2.560.000} = 0{,}0006$$

PRACTICA

34. S'extreuen 3 boles d'una bossa que conté 4 boles vermelles, 7 de blaves i 9 de blanques, amb reemplaçament de les boles primera i segona. Calcula la probabilitat d'obtenir la sèrie blava-vermella-blanca.

Teorema de la probabilitat total

Calcular probabilitats utilitzant el teorema de la probabilitat total

Un cinema disposa de tres sales. En la taula es mostra la capacitat i el percentatge de butaques venudes per Internet de cadascuna de les sales.

Si es va a la taquilla i es tria una butaca a l'atzar, quina probabilitat hi ha que s'hagi venut per Internet?

	Sala 1	Sala 2	Sala 3
Capacitat	125	90	160
Butaques venudes per Internet	17 %	28 %	12 %

PRIMER. Es busquen successos de l'espai mostral tals que siguin incompatibles entre ells i la unió dels quals sigui el total.

Considerant l'esdeveniment A_i = «Triar la sala i», és a dir:

A_1 = «Triar la sala 1» A_2 = «Triar la sala 2» A_3 = «Triar la sala 3»

Una butaca només pertany a una sala $\rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

Qualsevol butaca pertany a una de les sales $\rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$

SEGON. S'aplica el teorema de la probabilitat total i es calculen les probabilitats necessàries.

Els esdeveniments compleixen les condicions del teorema de la probabilitat total.

Donat el succés B = «Ser venuda per Internet»:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3) =$$

$$= \frac{125}{375} \cdot 0{,}17 + \frac{90}{375} \cdot 0{,}28 + \frac{160}{375} \cdot 0{,}12 = 0{,}175$$

La probabilitat de triar una butaca venuda per Internet és del 17,5 %.

PRACTICA

35. L'estoig E_1 conté 4 bolígrafs blaus i 2 de negres. L'estoig E_2 conté 3 bolígrafs blaus, 1 de negre i 1 de vermell. Es llança una moneda enlaire. Si surt cara es treu un bolígraf de l'estoig E_1, i si surt creu, de l'estoig E_2. Troba la probabilitat que surti un bolígraf negre.

Teorema de Bayes

Calcular probabilitats utilitzant el teorema de Bayes

Un cinema disposa de tres sales. En la taula es mostra la capacitat i el percentatge de butaques venudes per Internet de cadascuna de les sales.

Si s'escull una butaca a l'atzar i està venuda per Internet, quina probabilitat hi ha que sigui de la sala 1?

	Sala 1	Sala 2	Sala 3
Capacitat	125	90	160
Butaques venudes per Internet	17 %	28 %	12 %

PRIMER. Es busquen successos de l'espai mostral tals que siguin incompatibles entre ells i la unió dels quals sigui el total.

Considerant l'esdeveniment A_i = «Triar la sala i», és a dir:

A_1 = «Triar la sala 1» A_2 = «Triar la sala 2» A_3 = «Triar la sala 3»

Una butaca només pertany a una sala $\rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

Qualsevol butaca pertany a una de les sales $\rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$

SEGON. S'aplica el teorema de Bayes i es calculen les probabilitats necessàries.

Els esdeveniments compleixen les condicions del teorema de Bayes.

Donat el succés B = «Ser venuda per Internet»:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(B/A_i)} = \frac{P(A_1) \cdot P(B/A_1)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3)} =$$

$$= \frac{\frac{125}{375} \cdot 0{,}17}{\frac{125}{375} \cdot 0{,}17 + \frac{90}{375} \cdot 0{,}28 + \frac{160}{375} \cdot 0{,}12} = 0{,}324$$

La probabilitat que una butaca venuda per Internet sigui de la sala 1 és del 32,4 %.

PRACTICA

36. L'estoig E_1 conté 4 bolígrafs blaus i 2 de negres. L'estoig E_2 conté 3 bolígrafs blaus, 1 de negre i 1 de vermell. Es llança una moneda enlaire. Si surt cara es treu un bolígraf de l'estoig E_1, i si surt creu, de l'estoig E_2. Sabent que el bolígraf que s'ha tret és negre, troba la probabilitat que sigui de l'estoig E_2.

Experiments aleatoris, mètodes de comptatge i esdeveniments

37. Per a cadascun dels experiments que es detallen, indica si són aleatoris o no.

a) Mesurar la longitud d'una carretera.

b) Tirar un dau i anotar la suma dels punts de les cares visibles.

c) Calcular el preu final d'una compra.

d) Pesar una ampolla d'aigua de 2 litres.

e) Treure una bola d'una bossa que conté 6 boles de colors diferents.

f) Extreure una carta de la baralla espanyola i anotar el coll a què pertany.

38. Descriu l'espai mostral per als experiments aleatoris de l'activitat anterior.

39. Calcula quantes possibilitats hi ha:

a) En escollir 5 nens d'un grup de 12.

b) Per col·locar 8 llibres diferents en un prestatge.

c) En formar combinacions de 6 lletres amb les lletres de la paraula CARME.

d) En escriure nombres de 5 xifres amb els dígits 1, 2, 3.

e) En formar combinacions de 4 lletres amb les lletres de la paraula RAMON.

f) En escriure nombres de 2 xifres amb els dígits del nombre 235.

40. Amb 4 pots de pintura: groga, verda, vermella i marró, quantes barreges de dos colors podem fer?

41. De quantes maneres poden arribar a la meta 4 nedadors?

42. De quantes maneres podem col·locar-nos 2 anells diferents en una mà, de manera que no estiguin al mateix dit?

43. Escriu l'espai mostral dels experiments compostos següents:

a) Es llancen 3 monedes i s'anota el nombre de cares obtingudes.

b) Es tiren 2 daus cúbics, un de vermell i un altre de blau, i s'anoten els parells de resultats.

c) Es tiren 2 daus cúbics, un de vermell i un altre de blau, i s'anota la suma de les puntuacions.

d) S'extreuen 2 peces de fruita d'una fruitera on hi ha pomes, taronges i peres.

e) S'extreuen 2 boles d'una bossa que conté boles blanques, negres, vermelles i verdes.

f) S'extreuen 3 caramels d'una capsa que té caramels de maduixa, llimona i taronja.

44. Es considera l'experiment que consisteix a tirar un dau amb 12 cares numerades de l'1 al 12 i els esdeveniments següents:

A = «Que surti un nombre parell»
B = «Que surti un nombre múltiple de 3»
C = «Que surti un nombre múltiple de 5»
D = «Que surti un nombre més gran o igual que 6»
E = «Que surti un nombre més petit que 5»

a) Descriu els esdeveniments indicant els successos elementals que els componen.

b) Quins són incompatibles dos a dos?

c) Calcula $A - B$, $\overline{A} \cup F$, $\overline{C} \cap A$.

45. Es tira un dau cúbic, s'anota la suma de les puntuacions de les cares visibles i es consideren els esdeveniments:

A = «Que surti un nombre parell»
B = «Que surti un nombre més gran que 16»
C = «Que surti un nombre múltiple de 3»

a) Descriu els esdeveniments indicant els successos elementals que els componen.

b) Calcula $(A \cup \overline{B}) \cap C$.

c) Comprova aquestes propietats:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

46. S'ha segmentat la població d'una província determinada respecte al lloc de residència, zona urbana o zona rural, i per edat, majors de 18 anys i menors de 18 anys.

Descriu els esdeveniments que puguis formar amb els successos següents:

A = «Ser major de 18 anys»
B = «Viure en zona urbana»

47. Es fa girar una ruleta segmentada en 18 sectors numerats de l'1 al 18, s'espera que s'aturi i s'anota el nombre on s'ha parat. Expressa els successos següents com a unió o intersecció:

A = «Aturar-se en un nombre múltiple de 3 o de 5»
B = «Aturar-se en un nombre més gran que 15 o més petit que 5»
C = «Aturar-se en un nombre múltiple de 3 i de 4»
D = «Aturar-se en un nombre parell i divisor de 18»

48. S'extreu una carta de la baralla espanyola. Considera aquests esdeveniments:

A = «Treure un as»

B = «Treure un basto»

C = «Treure un cavall»

R = «Treure un rei»

F = «Treure una figura»

Descriu els esdeveniments següents indicant els successos elementals que els componen.

a) $A \cap B$ c) $B \cap F$ e) $\overline{C} \cap F$

b) $\overline{B} \cap C$ d) $A \cup R \cup F$ f) $(C \cup R) \cap \overline{F}$

49. Un experiment consisteix a treure una bola d'una urna amb 4 boles vermelles, numerades de l'1 al 4; 5 boles blaves, numerades de l'1 al 5, i tres boles més negres, numerades de l'1 al 3. Es consideren els esdeveniments:

R = «Que surti una bola vermella»

B = «Que surti una bola blava»

N = «Que surti una bola negra»

I = «Que surti un nombre imparell»

P = «Que surti un nombre parell»

Descriu aquests esdeveniments:

a) $R \cup P$ c) $\overline{P} \cap N$ e) $\overline{N}$

b) $I \cup P$ d) $R \cap I$ f) $\overline{R \cup B}$

Propietats de la probabilitat

50. En un experiment aleatori sabem que:

$$P(A) = 0{,}6 \qquad P(B) = 0{,}5 \qquad P(A \cap B) = 0{,}2$$

Calcula les probabilitats següents.

a) $P(\overline{A})$ d) $P(A - B)$

b) $P(A \cup B)$ e) $P(\overline{B} - A)$

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ f) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

51. Si A i B són incompatibles, amb $P(A) = 0{,}6$ i $P(A \cup B) = 0{,}9$, calcula el següent.

a) $P(B)$ b) $P(A - B)$ c) $P(\overline{A} \cap B)$

52. Determina $P(A \cup B)$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ i $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, si:

$$P(A) = 0{,}6 \qquad P(B) = 0{,}5 \qquad P(A \cap B) = 0{,}3$$

53. Troba $P(A)$, $P(B)$ i $P(\overline{A} \cap B)$, si:

$$P(A \cup B) = 0{,}8 \qquad P(\overline{B}) = 0{,}6 \qquad P(A \cap B) = 0{,}3$$

54. És possible que hi hagi dos esdeveniments tals que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}8$ i $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}7$?

55. És possible que hi hagi dos esdeveniments tals que $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$ i $P(A \cap B) = 0{,}3$? Si és possible, com són aquests successos?

56. És possible trobar dos esdeveniments tals que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}2$ i $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}6$?

57. Si $P(A) = 0{,}7$ i $P(B) = 0{,}4$, A i B poden ser esdeveniments incompatibles?

58. Sabem que $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B)$.

a) Esbrina com són els successos A i B.

b) Calcula $P(A \cup B)$ i $P(A \cap B)$.

59. Si $E = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ és l'espai mostral d'un experiment aleatori:

a) Pot passar que $P(S_1) = \frac{1}{5}$, $P(S_2) = \frac{2}{3}$, $P(S_3) = \frac{1}{4}$ i $P(S_4) = \frac{1}{6}$?

b) I que $P(S_1) = \frac{1}{5}$, $P(S_2) = \frac{1}{3}$, $P(S_3) = \frac{1}{4}$ i $P(S_4) = \frac{1}{6}$?

Justifica les respostes.

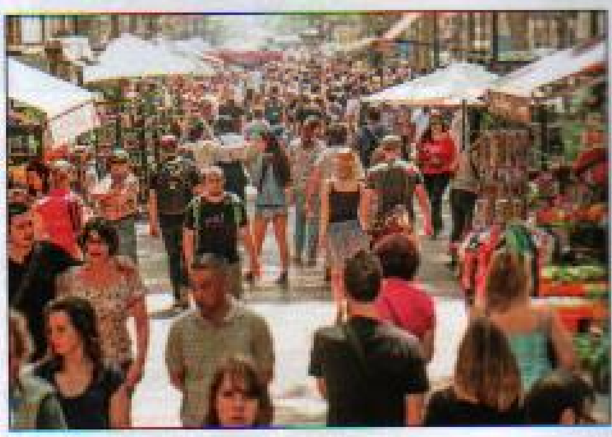
60. Després d'estudiar una població determinada, es conclou que, si s'escull una persona a l'atzar d'aquesta població, la probabilitat que:

- Estigui a favor que els comerços obrin en dies festius és 0,8.
- Estigui a favor d'una llei que reguli l'horari comercial és 0,4.
- Estigui a favor de les dues qüestions és 0,3.

Calcula:

a) La probabilitat que la persona escollida estigui a favor que els comerços obrin en dies festius o que hi hagi una llei que reguli l'horari comercial.

b) La probabilitat que ni estigui a favor que els comerços obrin en dies festius ni que hi hagi una llei que reguli l'horari comercial.



61. En un centre escolar determinat, després d'estudiar els resultats acadèmics, es conclou que la probabilitat que un alumne aprovi Llengua espanyola és 0,7; la probabilitat que aprovi Llengua estrangera és 0,6 i la probabilitat d'aprovar totes dues matèries és 0,5. Si es tria un alumne a l'atzar d'aquest centre escolar mitjançant un sorteig:

a) Quina probabilitat hi ha que almenys aprovi una de les dues matèries?

b) Quina probabilitat hi ha que només n'aprovi una de les dues?

c) Quina probabilitat hi ha que no n'aprovi cap?

62. Després de fer una enquesta entre els habitants d'una ciutat, es conclou que:

- El 40 % habitualment llegeix el diari.
- El 30 % llegeix revistes culturals.
- El 20 % llegeix els dos tipus de publicacions.

Si s'escull un ciutadà a l'atzar d'aquest indret, quina probabilitat hi ha que llegeixi el diari o llegeixi revistes culturals?

Càlcul de probabilitats

63. S'extreu una carta de la baralla espanyola. Calcula la probabilitat que:

a) Sigui un basto o una espasa.
b) Sigui un basto o un rei.
c) Sigui una figura o un cavall.
d) Sigui una copa o una figura.

64. Considera l'experiment d'escollir a l'atzar una peça de fruita d'una fruitera on hi ha 4 pomes vermelles, 6 taronges, 3 pomes verdes, 5 peres verdes, 2 plàtans i 1 pera groga. Calcula la probabilitat que l'elecció sigui:

a) Una peça de color vermell.
b) Una peça de color verd.
c) Una peça que no sigui verda ni vermella.
d) Una peça que no sigui groga.

65. S'extreu una bola d'una urna amb 7 boles vermelles numerades de l'1 al 7, 4 boles blaves numerades del 8 a l'11 i 3 boles verdes numerades del 12 al 14. Calcula la probabilitat que:

a) La bola sigui vermella.
b) La bola sigui vermella o verda.
c) El nombre de la bola sigui múltiple de 5.
d) El nombre de la bola sigui més gran que 8 però més petit que 13.
e) El nombre de la bola sigui parell, i la bola, de color verd.
f) El nombre de la bola sigui senar, i la bola, de color blau o verd.

66. Es llancen dos daus enlaire, un de blau i un altre de vermell, i s'anoten els parells de resultats. Calcula la probabilitat que:

a) Els resultats dels dos daus siguin iguals.
b) Els resultats dels dos daus siguin parells.
c) El primer resultat sigui més petit que el segon.

67. Considera l'experiment que consisteix a tirar dos daus, un de vermell i un altre de blau, i anotar la suma de les puntuacions obtingudes. Calcula la probabilitat que:

a) La suma sigui 7.
b) La suma sigui un nombre múltiple de 3.
c) La suma sigui més petita o igual que 9.
d) La suma no sigui més gran que 4.

68. Es té un moneder amb 4 monedes de 0,20 €, 6 monedes de 0,50 €, 2 monedes d'1 € i 3 monedes de 2 €. Se'n treu una moneda a l'atzar. Calcula la probabilitat que tingui un valor:

a) Superior a 0,50 €.
b) Inferior a 2 €.
c) Comprès entre 0,10 i 0,80 €.

69. Calcula el valor de x si en un dau es té que:

$$P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{7}$$
$$P(4) = P(5) = P(6) = x$$

70. S'ha trucat un dau cúbic, de manera que les puntuacions que són nombres primers tenen una probabilitat doble de sortir que les que no ho són. Quina probabilitat té cadascuna de les puntuacions? Quina probabilitat hi ha d'obtenir una puntuació parella?

71. En un dau trucat es tenen les probabilitats següents.

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(6) = 0{,}1$$
$$P(4) = a \qquad P(5) = b \qquad P(4) = 2\,P(5)$$

Calcula a i b.

Probabilitat condicionada

72. En l'experiment que consisteix a tirar dos daus, un de vermell i un altre de blau, i considerar els parells de puntuacions, siguin els esdeveniments:

A = «Les dues puntuacions són iguals»
B = «Les dues puntuacions són senars»
C = «Les dues puntuacions són múltiples de 3»

Calcula aquestes probabilitats:

a) $P(A/B)$ b) $P(C/B)$ c) $P(C/A)$

73. De totes les famílies que tenen tres fills, considerem aquelles en què almenys hi ha dues nenes. Quina probabilitat hi ha que l'altre fill sigui nen?

74. En l'experiment que consisteix a tirar dos daus, un de vermell i un altre de blau, calcula la probabilitat que:

a) Una de les puntuacions sigui senar, sabent que la suma de les dues puntuacions és 9.

b) Una de les puntuacions sigui parella, sabent que la suma de les dues puntuacions és 7.

c) La suma de les puntuacions sigui 7, sabent que la diferència és 3.

75. En l'experiment que consisteix a agafar una carta de la baralla espanyola, calcula la probabilitat de treure un rei, sabent que s'ha obtingut una figura.

76. En una urna hi ha 50 targetes numerades de l'1 al 50. Calcula la probabilitat que, en treure'n una a l'atzar, estigui numerada amb un quadrat perfecte, si se sap que ha sortit un múltiple de 3.

77. Calcula $P(A \cup B)$, sabent que $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}5$ i $P(A/B) = 0{,}2$.

78. El metge d'una empresa té una taula en què distribueix els empleats segons el sexe i la seva condició de fumadors, però s'ha perdut una dada. Completa la taula a la llibreta sabent que «Ser dona» i «Ser fumador» són esdeveniments independents.

	Fumador	No fumador
Dona	30	45
Home	80	

Regla del producte i probabilitat total

79. En un estoig hi ha 9 pintures de color blau, 5 de color vermell, 3 de color verd i 1 de color morat. Se n'escullen tres a l'atzar (amb reemplaçament). Calcula la probabilitat que:

a) Tres siguin de color verd.

b) Tres siguin de color morat.

c) Una sigui blava, i dues, verdes.

d) Siguin de diferent color.

e) Almenys n'hi hagi una de color vermell.

80. En una bossa hi ha 8 caramels de maduixa, 4 de menta i 6 de llimona. Una nena escull un caramel a l'atzar de la bossa i, després de menjar-se'l, escull un segon caramel a l'atzar de la mateixa bossa. Calcula la probabilitat que:

a) Els dos caramels siguin de maduixa.

b) Els dos caramels siguin del mateix gust.

c) Els dos caramels siguin d'un gust diferent.

d) El segon sigui de menta.

e) El segon no sigui de maduixa.

f) Almenys un hagi estat de llimona.

81. En l'experiment que consisteix a extreure tres monedes (sense reemplaçament) d'un moneder que conté 5 monedes de 0,50 €, 7 monedes d'1 € i 3 de 2 €, calcula la probabilitat que:

a) La primera sigui d'1 €; la segona, de 0,50 €, i la tercera, de 2 €.

b) Les dues primeres siguin iguals, i la tercera, desigual.

c) Siguin tres monedes del mateix valor.

82. En un hospital de tres plantes, el 50 % dels malalts que hi estan ingressats ocupen la primera planta, el 30 % ocupen la segona planta i la resta s'estan a la tercera planta. Són homes el 62 % dels malalts de la primera planta, el 44 % dels de la segona planta i el 35 % dels de la tercera planta. Si s'escull un malalt a l'atzar d'aquest hospital, determina la probabilitat que sigui:

a) Un home.

b) Una dona de la segona planta.

c) Un home de la primera planta o una dona de la tercera planta.

83. A la nevera d'en Josep hi ha 5 refrescos de cola, 8 de taronja i 2 de llimona. Primer n'agafa un a l'atzar. En cas que sigui de llimona o cola, repeteix i es pren un segon refresc, que també escull a l'atzar. Calcula la probabilitat que:

a) Es prengui dos refrescos de llimona.

b) Se'n prengui primer un de cola i després un de taronja.

c) Se'n prengui un de cola i un altre de llimona.

d) Es prengui dos refrescos.

e) Es prengui dos refrescos del mateix gust.

f) Se'n prengui un de taronja i un altre de llimona.

84. Fes l'activitat anterior suposant que només hi ha un refresc de llimona.

85. Es fan dos grups amb les cartes d'una baralla espanyola: G_1, amb les copes, i G_2, amb la resta. Es tira un dau i, si el resultat és un nombre més petit o igual que 4, s'escull una carta a l'atzar de G_2, i si és més gran que 4, s'escull de G_1. Calcula la probabilitat que:

a) Surti una figura.

b) Surti un as.

c) Surti un cavall, sabent que, en tirar el dau, surt un 6.

86. En un restaurant hi ha 26 homes, 20 dones i 3 nens. D'aquests, 15 homes, 8 dones i 1 nen estan dinant «a la carta», mentre que la resta per dinar ha demanat el «menú del dia». S'escull una persona a l'atzar. Calcula la probabilitat que sigui home i estigui fent un menú del dia.

87. Es llança una moneda. Si surt cara, s'escull un nombre a l'atzar de l'1 al 10; si surt creu, es tira un dau. Calcula la probabilitat que el nombre que s'obté sigui:

a) Un nombre parell.
b) Un múltiple de 3.
c) Un múltiple de 5.

88. A la pila de cartes M_1 hi ha 5 cartes d'oros i 6 de bastos, i a la M_2 hi ha 7 cartes d'oros, 3 de bastos i 2 d'espases. S'agafa una carta de M_1 i es posa a M_2. A continuació, s'agafa una carta de M_2. Calcula la probabilitat que:

a) Surti una carta d'oros.
b) Surti una carta d'espases.
c) Surti una carta d'oros després de passar-ne una de bastos.
d) Surti una carta de bastos després de passar-ne una d'oros.

Teorema de Bayes

89. Tenim dues capses. A la capsa C_1 hi ha 9 fitxes vermelles i 5 fitxes negres. A la capsa C_2 hi ha 6 fitxes vermelles, 3 fitxes negres i 2 de blanques. Es llancen dues monedes enlaire. Si surten dues cares, es treu una fitxa de C_1; si no, es treu de C_2. Calcula la probabilitat que:

a) La fitxa sigui vermella.
b) La fitxa sigui blanca.
c) Surtin dues cares en llançar les monedes, sabent que la fitxa que ha sortit és negra.
d) No surtin dues cares en llançar les monedes, sabent que la fitxa és vermella.

90. A la capsa C_1 hi ha un dau de quatre cares, a la capsa C_2 hi ha un dau cúbic i a la capsa C_3 hi ha un dau de vuit cares. S'escull una de les capses a l'atzar i es tira el dau que conté. Calcula la probabilitat que:

a) Surti un 4.
b) Surti un nombre parell.
c) Surti un nombre més gran que 5.
d) El dau sigui de la capsa C_1, sabent que ha sortit un 4.
e) El dau sigui de la capsa C_3, sabent que ha sortit un 6.

91. A l'urna U_1 hi ha 4 boles vermelles i 5 de negres, i a l'urna U_2 hi ha 6 boles vermelles i 3 de negres. Es treu una bola de U_1 i es posa a U_2. Aleshores es treu una bola a l'atzar de U_2. Calcula la probabilitat que:

a) Surti una bola vermella.
b) Surti una bola negra després d'haver-ne tret una de vermella de la primera urna.
c) La bola extreta de U_1 sigui negra, sabent que la que ha sortit de l'urna U_2 també és negra.

92. Tenim tres bosses, B_1, B_2 i B_3. Contenen el següent:

B_1: 4 boles blanques i 3 de negres.
B_2: 2 boles blanques i 5 de negres.
B_3: 5 boles blanques i 4 de negres.

Es tira un dau. Si surt 1, 2 o 3, s'extreu una bola de B_1; si surt 4 o 5, s'extreu de B_2; si surt 6, s'extreu de B_3. Sabent que la bola extreta és blanca, calcula la probabilitat que sigui de la bossa B_2.

93. En un cinema hi ha tres sales. A la sala *A*, hi estan projectant una pel·lícula i hi ha 240 espectadors. A la sala *B* hi ha 180 butaques ocupades, i a la sala *C* hi ha 80 persones. Se sap que la pel·lícula de la sala *A* agrada al 40 % dels espectadors, mentre que les pel·lícules de la resta de sales tenen el 50 % i el 90 % d'acceptació.

Quan s'acaben les tres pel·lícules i surten els espectadors, se n'escull un a l'atzar.

a) Quina probabilitat hi ha que la pel·lícula li hagi agradat?
b) Quina probabilitat hi ha que li hagi agradat si ha estat a la sala *C*?
c) I quina probabilitat hi ha que surti de la sala *C* si sabem que la pel·lícula li ha agradat?

94. El 60 % dels productes d'una marca es fabrica a la factoria de Portugal; el 30 % es fabrica a Espanya, i la resta, a la factoria d'Andorra. L'1 % dels productes fabricats a Portugal presenten algun defecte de fabricació, mentre que a Espanya i a Andorra aquests percentatges són del 0,5 i del 3 %, respectivament.

a) Determina la probabilitat que un producte sigui defectuós.

b) Si comprem un producte i és defectuós, quina probabilitat hi ha que aquest producte procedeixi d'Andorra?

95. El 60 % dels habitants adults d'un poble vota el partit QW i la resta vota el partit SZ. S'ha organitzat un referèndum. El 35 % dels votants de QW està a favor de la proposta, mentre que el 90 % dels votants de SZ també està disposat a donar-hi suport.

a) Si es duu a terme la votació, quina probabilitat hi ha que la proposta del referèndum s'aprovi?

b) Escollim un votant a l'atzar dels que han votat afirmativament. Quina probabilitat hi ha que aquesta persona sigui votant de QW?

Problemes de probabilitat

96. Els metges d'un hospital fan guàrdia tres dies a la setmana.

a) Calcula la probabilitat que un metge faci guàrdia dilluns, dimarts i dimecres.

b) Quina probabilitat hi ha que faci festa el cap de setmana (dissabte i diumenge)?

c) I que estigui de guàrdia tres dies alterns, és a dir, amb un dia de descans entre la primera i la segona guàrdia, i un altre dia de descans entre la segona i la tercera?

97. Un examen de tipus test consta de dues preguntes, per a les quals s'ofereixen quatre respostes possibles, i d'aquestes només n'hi ha una de correcta. Si es respon a l'atzar, quina probabilitat hi ha d'encertar dues preguntes? I de no encertar-ne cap? Resol l'activitat considerant que l'examen consta de quatre preguntes.

98. Quina probabilitat hi ha d'encertar 15 resultats d'una travessa de futbol composta de 15 partits? I d'encertar-ne 14?

99. L'1 % dels exemplars d'una varietat europea de peix presenta una malformació congènita que consisteix en l'absència de l'aleta dorsal. Aquest defecte és present en el 3 % dels peixos de la varietat africana. En un viver de peixos, el 80 % dels exemplars és de procedència europea, i la resta, africana.

a) Quina probabilitat hi ha que un peix del viver no tingui aleta dorsal?

b) Si el viver té aproximadament dos milions d'exemplars de peixos, quants no tindran aleta dorsal?

100. Esbrina la relació que han de complir x, y, z i t perquè A i P siguin successos independents.

	A	B
P	x	y
Q	z	t

101. Calcula.

a) Quina probabilitat hi ha que dos amics es trobin i hagin nascut el mateix dia de la setmana?

b) I si es troben tres amics, quina probabilitat hi ha que, com a mínim, dos amics hagin nascut el mateix dia de la setmana?

c) Quants amics s'han d'ajuntar per poder assegurar, amb més del 50 % de probabilitat, que almenys n'hi hagi dos de nascuts el mateix dia de la setmana?

102. En un joc es llança una moneda enlaire i, si surt cara, la Beatriu perd un punt i en Jesús en guanya un i, si surt creu, passa el contrari. Entre tots dos acorden que només es pot jugar si es disposa de punts per perdre.

a) Quina probabilitat hi ha que en Jesús hagi de deixar de jugar al tercer llançament?

b) I quina probabilitat hi ha que, després de llançar la moneda quatre vegades, en Jesús només tingui un punt?

MATEMÀTIQUES A LA TEVA VIDA

PER A QUÈ SERVEIX LA PROBABILITAT?

Per prendre decisions amb la màxima seguretat possible d'encertar-les

Recordes la situació de què parlàvem al principi de la unitat? Aquella en què eres el concursant en un programa de televisió, triaves una porta entre tres de possibles i, abans d'obrir la teva elecció, el presentador obria una altra porta que no tenia premi i et donava l'opció de canviar la porta que havies escollit.

Aquest és un dels problemes matemàtics més famosos dels últims 50 anys i s'anomena *problema de Monty Hall*, en honor d'un presentador canadenc, molt conegut per concursos d'aquest tipus.

Suposem que esculls la porta 1, tot i que si optes per qualsevol altra passa exactament el mateix perquè la possibilitat que hi hagi premi a qualsevol de les tres portes és equiprobable.

Quan esculls, com bé saps gràcies a la regla de Laplace, tens $\frac{1}{3}$ de probabilitat d'encertar-la. O el que és el mateix, la probabilitat que el premi sigui en una de les altres dues portes és $\frac{2}{3}$. És a dir:

$$P(\text{Porta } 1) = \frac{1}{3} \qquad P(\text{Porta } 2 \cup \text{Porta } 3) = \frac{2}{3}$$

Doncs bé, si el presentador et fa el favor d'obrir la porta 3 i saps que no hi ha res, passa que $P(\text{Porta } 2 \cup \text{Porta } 3) = P(\text{Porta } 2) = \frac{2}{3}$.

Aleshores a la porta 2 passa a haver-hi una probabilitat que tingui premi de $\frac{2}{3}$ i, per tant, la teva millor estratègia ha de ser canviar a l'opció 2.

Segur que estàs pensant que, si s'obre una porta, aleshores passaries a tenir una probabilitat d'encertar-la de $\frac{1}{2}$, però no és així, perquè el presentador no ha triat una de les dues portes a l'atzar, sinó que ha escollit una porta on sap que no hi ha el premi.

Si no ho acabes de veure, farem el mateix experiment amb 100 portes. Suposem que tries la porta 1, és a dir, $P(\text{Porta } 1) = \frac{1}{100}$ i

$P(\text{Porta } 2 \cup \text{Porta } 3 \cup \ldots \cup \text{Porta } 100) = \frac{99}{100}$.

Així es veu molt clar que la probabilitat que fallis en fer l'elecció inicial és molt alta.

Si el presentador obre 98 portes de cop i no hi ha res, la probabilitat ens diu que la porta no triada que queda sense obrir ara té un 99 % de possibilitats d'èxit, ja que el presentador ha escollit 98 portes on estava segur que no hi havia premi.

Aquest exemple ens mostra com de vegades la nostra intuïció falla, i que és molt més segur deixar-nos guiar per les matemàtiques que coneixem.

LLEGEIX I COMPRÈN

1. Per què, en cas que tinguis tres portes, els esdeveniments «Premi a la porta 1», «Premi a la porta 2» i «Premi a la porta 3» són equiprobables?

INTERPRETA

2. Per què quan el presentador obre la porta 3, i resulta que no hi ha premi, els successos «Premi a la porta 1» i «Premi a la porta 2» deixen de ser equiprobables?

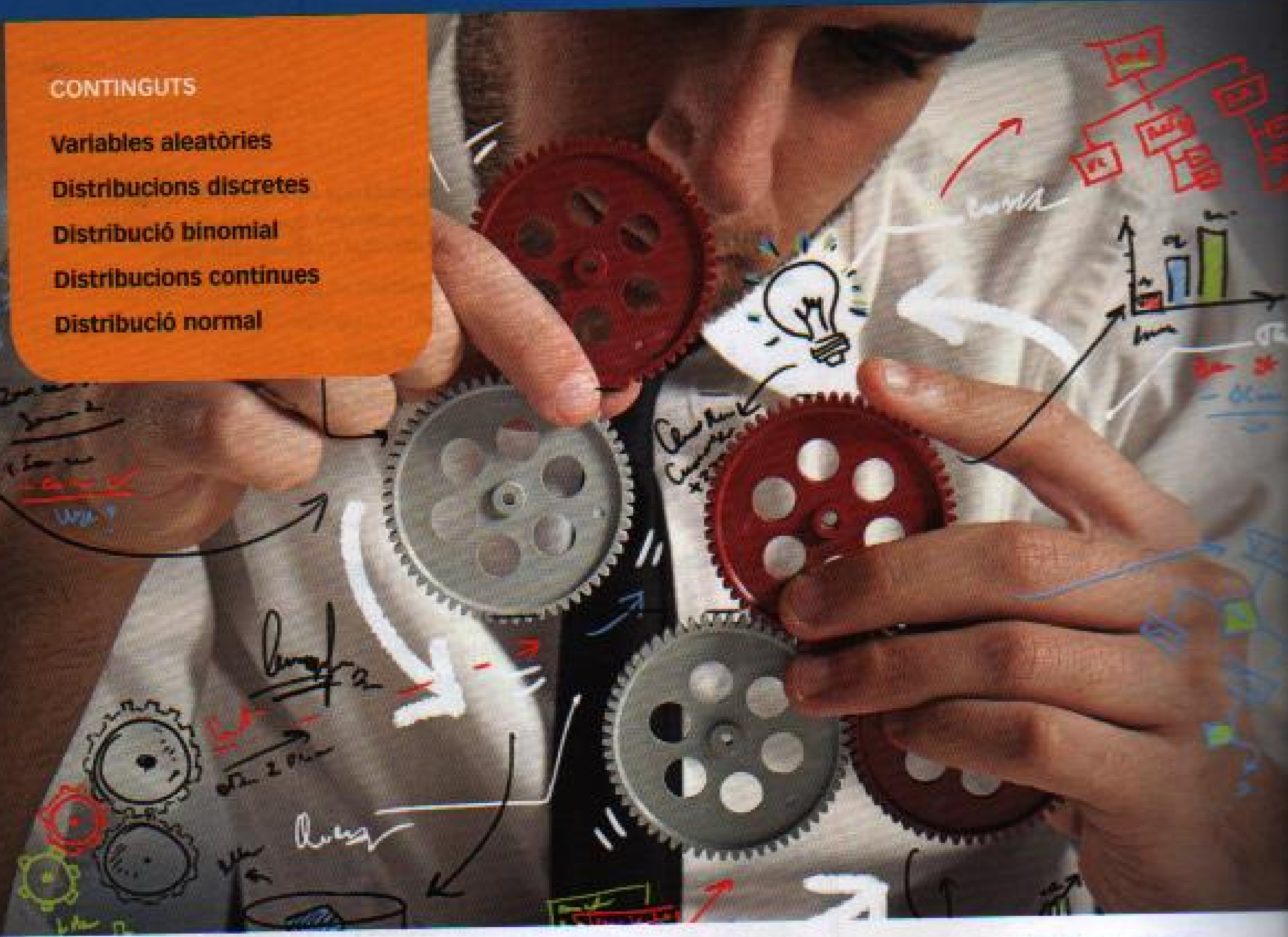
REFLEXIONA

3. Quina seria la millor estratègia si hi ha quatre portes i dues tenen premi?

APLICA

4. Tens tres portes, i saps que la probabilitat que hi hagi premi a la primera porta és el doble que el fet que hi hagi premi a les altres dues. Si tries la porta 1 i el presentador obre la porta 2 i no té premi, quina probabilitat hi ha que el premi sigui a la porta 3?

14 Distribucions binomial i normal



CONTINGUTS

- Variables aleatòries
- Distribucions discretes
- Distribució binomial
- Distribucions contínues
- Distribució normal

Terence Tao és un matemàtic australià que és considerat l'ésser humà viu més intel·ligent del món. Des de ben petit va mostrar una intel·ligència excepcional, i, avui dia, és un exponent mundial en l'estudi de les matemàtiques.

Terence Tao és l'excepció, ja que la majoria de les persones no som tan intel·ligents, però tampoc cal ser-ho mentre siguem capaços de complir les nostres obligacions i tasques.

La intel·ligència de les persones es pot mesurar de diferents maneres, tot i que l'objectiu final és obtenir un valor numèric anomenat coeficient intel·lectual (CI).

De ben segur que durant tota la teva vida d'estudiant has fet algun test d'intel·ligència que, a més a més del teu CI, t'ha donat directrius de per a quina mena de treball estàs més qualificat o quines són les teves millors aptituds.

Però, per conèixer el nivell d'intel·ligència d'un grup de persones com a conjunt (ja siguin habitants d'una ciutat, d'un país o del món), seria tremendament costós dur a terme aquest tipus de test a tots els habitants que el formen.

Com es pot mesurar una característica d'una població?

1 Variables aleatòries

Una **variable aleatòria** és una funció que a cada esdeveniment o succés elemental d'un experiment aleatori hi fa correspondre un nombre.

Fixa-t'hi

A cada esdeveniment elemental hi fem correspondre un nombre, però a un mateix nombre hi poden correspondre diversos esdeveniments elementals.

SABER FER

Construir una variable aleatòria a partir d'un experiment

▶ **Disposem de tres urnes, amb una bola roja i una altra de blanca en cadascuna. Defineix una variable aleatòria sobre l'experiment que consisteix a treure una bola de cadascuna, i calcula la probabilitat d'obtenir cada valor.**

PRIMER. Es descriu l'espai mostral de l'experiment aleatori.

Si R = «Sortir una bola roja» i B = «Sortir una bola blanca»:

$$E = \{RRR, RRB, RBR, BRR, RBB, BRB, BBR, BBB\}$$

SEGON. Es defineix la variable aleatòria assignant un nombre a cada esdeveniment elemental.

La funció X, que determina el nombre de boles blanques que hi ha en cada esdeveniment elemental, és una variable aleatòria.

$X(RRR) = 0$ $\quad X(RBR) = 1$ $\quad X(RBB) = 2$ $\quad X(BBR) = 2$

$X(RRB) = 1$ $\quad X(BRR) = 1$ $\quad X(BRB) = 2$ $\quad X(BBB) = 3$

TERCER. Es calcula la probabilitat que la variable aleatòria prengui cada valor.

$\{X = 0\} = \{RRR\}$ $\qquad P(X = 0) = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

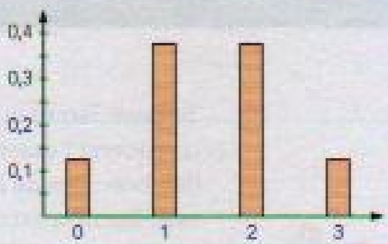
$\{X = 1\} = \{RRB, RBR, BRR\}$ $\qquad P(X = 1) = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$

$\{X = 2\} = \{RBB, BRB, BBR\}$ $\qquad P(X = 2) = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$

$\{X = 3\} = \{BBB\}$ $\qquad P(X = 3) = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

QUART. Es representen amb taules o gràfics les dades de la variable aleatòria.

X	$P(X = x)$	$P(X \leq x)$
0	0,125	0,125
1	0,375	0,5
2	0,375	0,875
3	0,125	1
Total	1	



No te n'oblidis

En una variable estadística, la taula i el gràfic depenen de les dades de la mostra.

D'altra banda, la taula i el gràfic d'una variable aleatòria no varien, sempre són iguals.

ACTIVITATS

1. Llancem dos daus de 6 cares.

a) La funció que assigna a cada esdeveniment elemental la suma de les puntuacions és una variable aleatòria?

b) Elabora'n la taula de valors i representa-la gràficament.

2. Considerem l'experiment aleatori consistent a llançar un dau i una moneda.

a) Calcula l'espai mostral i la probabilitat de cada succés elemental.

b) Defineix dues variables aleatòries i representa-les.

1.1. Paràmetres

Els paràmetres més usuals d'una variable aleatòria són la mitjana, la variància i la desviació típica. Aquests paràmetres es calculen com les mitjanes estadístiques.

Mitjana μ

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n$$

Variància σ^2

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \mu^2$$

Desviació típica σ

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \mu^2}$$

X	$P(X = x_i)$
x_1	$P(X = x_1) = p_1$
x_2	$P(X = x_2) = p_2$
x_3	$P(X = x_3) = p_3$
...	...
x_n	$P(X = x_n) = p_n$
Total	1

Ho escrivim així

La mitjana, μ, d'una variable aleatòria s'anomena també esperança matemàtica, $E(X)$, de la variable.

$$\mu = E(X)$$

EXEMPLE

1 Calcula la mitjana i la desviació típica de la variable aleatòria, X, que compta el nombre de cares en llançar tres monedes.

Mitjana: $\mu = \sum p_i x_i = 0{,}125 \cdot 0 + 0{,}375 \cdot 1 + 0{,}375 \cdot 2 + 0{,}125 \cdot 3 = 1{,}5$

Desviació típica: $\sigma = \sqrt{\sum p_i x_i^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$

No te n'oblidis

Fins ara, en les variables estadístiques, se'n calculaven les mesures, que depenien de la mostra.

En les variables aleatòries, aquestes mesures les determina la població i, per això, per distingir-les de les anteriors les anomenem paràmetres.

1.2. Classificació de variables aleatòries

Les variables aleatòries, segons els valors que prenen, poden ser:

- **Discretes**, quan, entre dos valors donats, només pren un nombre finit de valors.
- **Contínues**, quan, entre cada dos valors, el nombre de valors que pot prendre és infinit.

EXEMPLE

2 Classifica les variables aleatòries següents.

a) X = «Suma de punts en llançar dos daus»

b) X = «Estatura, en cm, d'una persona triada a l'atzar»

a) $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Per tant, la variable és discreta, ja que entre cada dos valors hi ha un nombre finit de valors.

b) Entre dues estatures qualssevol sempre podem trobar infinits valors. Per tant, és una variable contínua.

ACTIVITATS

3. En una urna hi ha 5 boles vermelles i 3 boles blaves. Es fa un experiment que consisteix a treure 3 boles i anotar el nombre de boles blaves que s'han aconseguit.

Fes una taula amb la distribució de probabilitat d'aquest experiment, i troba la mitjana i la desviació típica.

4. Un dau trucat té la distribució de probabilitat de la taula. Troba el valor que falta i la mitjana i la desviació típica.

X = «Puntuació»	1	2	4	5	6
$P(X = x)$	0,1	0,12	0,2	0,3	0,15

3.1. Càlcul de probabilitats a $B(n, p)$

Hi ha nombroses situacions de la vida quotidiana que es resolen mitjançant una distribució binomial, $B(n, p)$.

SABER FER

Calcular probabilitats en variables aleatòries que segueixen una distribució binomial

▶ **Un examen de tipus test consta de 10 preguntes; cadascuna té quatre possibles respostes, però només una és la correcta. Si responem a l'atzar, calcula les probabilitats següents.**

a) Encertar set respostes.

b) Aprovar l'examen.

c) Tenir excel·lent.

d) No arribar al notable.

PRIMER. Es defineix la variable aleatòria discreta que es farà servir.

X = «Nombre d'encerts en l'examen»

SEGON. Es calculen els paràmetres de la distribució.

$n \rightarrow$ nombre de vegades que es fa l'experiment, és a dir, les preguntes que es responen a l'atzar, $10 \rightarrow n = 10$

$p \rightarrow$ probabilitat d'obtenir un encert quan es respon a l'atzar $\rightarrow p = P(\text{«Encertar la pregunta»}) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Es té llavors que $X \equiv B(10; 0{,}25)$.

TERCER. S'escriu cada un dels successos en funció dels valors de la variable aleatòria.

a) Encertar 7 respostes $\rightarrow X = 7$

b) Aprovar l'examen $\rightarrow X \geq 5$

c) Tenir excel·lent $\rightarrow X \geq 9$

d) No arribar al notable $\rightarrow X < 7$

QUART. Es calculen les probabilitats perdudes amb l'ajuda de la funció de probabilitat.

$$P(X = i) = \binom{10}{i} \cdot 0{,}25^i \cdot 0{,}75^{10-i}$$

a) $P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}25^7 \cdot 0{,}75^{10-7} = 0{,}0030899048$

b) $P(X \geq 5) = \sum_{i=5}^{10} \binom{10}{i} \cdot 0{,}25^i \cdot 0{,}75^{10-i} = 0{,}0781269073$

c) $P(X \geq 9) = \sum_{i=9}^{10} \binom{10}{i} \cdot 0{,}25^i \cdot 0{,}75^{10-i} = 0{,}0000295639$

d) $P(X < 7) = P(X \leq 6) = \sum_{i=0}^{6} \binom{10}{i} \cdot 0{,}25^i \cdot 0{,}75^{10-i} = 0{,}9964942932$

Recorda-ho

De vegades és més senzill calcular la probabilitat del succés contrari.

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$

ACTIVITATS

9. Considerem una variable aleatòria qualsevol, X, que segueix una distribució binomial $B(8; 0{,}6)$. Calcula les diferents probabilitats que apareixen a continuació.

a) $P(X = 4)$

b) $P(X < 7)$

c) $P(X \geq 6)$

d) $P(3 \leq X \leq 5)$

e) $P(X \leq 7)$

f) $P(0 < X < 8)$

10. En un laboratori d'anàlisis clíniques saben que el 98 % de les proves de diabetis que fan surten negatives. Si han rebut 10 mostres per analitzar:

a) Determina la probabilitat que hi hagi dues persones a qui la prova doni positiu.

b) Quina és la probabilitat que la prova resulti positiva a més d'una persona?

3.2. Càlcul de probabilitats mitjançant taules a $B(n, p)$

Per trobar probabilitats en una distribució binomial se solen fer servir taules, on ja estan calculades les probabilitats d'aquest tipus de variables aleatòries.

SABER FER

Calcular probabilitats en variables aleatòries que segueixen una distribució binomial mitjançant taules

Un examen de tipus test consta de 8 preguntes; cadascuna té cinc possibles respostes, però només una és la correcta. Si responem a l'atzar, calcula les probabilitats següents.

a) Encertar 7 respostes.

b) Aprovar l'examen.

c) Fallar totes les respostes.

d) Encertar menys de 6 respostes.

PRIMER. Es calculen els paràmetres de la distribució.

La variable estadística, X, segueix la distribució binomial $X = B(8; 0{,}2)$.

$$n = 8$$

$$p = P(\text{«Encertar la pregunta»}) = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

SEGON. Per fer servir les taules cal analitzar tres dades:

n = nombre d'experiments

p = probabilitat d'encerts

r = nombre d'encerts

El paràmetre n marca el bloc de files de la taula on cal mirar.

En aquest cas, com que $n = 8$, es busca en el bloc on apareix $n = 8$.

TERCER. Es busca, en el bloc indicat, la columna que correspon al segon paràmetre, p.

En aquest cas, $p = 0{,}2$; per la qual cosa dins del bloc amb $n = 8$ se selecciona la columna on apareix $p = 0{,}2$.

QUART. L'últim paràmetre, r, indica la probabilitat que s'ha de trobar.

a) $P(X = 7) = 0{,}0001$

b) $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) =$
$= 0{,}0459 + 0{,}0092 + 0{,}0011 + 0{,}0001 + 0{,}0000 = 0{,}0563$

c) Si es fallen totes les respostes, equival a $X = 0$.
$P(X = 0) = 0{,}1678$

d) $P(X < 6) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$
$= 0{,}1678 + 0{,}3355 + 0{,}2936 + 0{,}1468 + 0{,}0459 + 0{,}0092 = 0{,}9988$

		p				
n	r	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001
	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076
	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231
	6		0,0000	0,0002	0,0011	0,0038
	7			0,0000	0,0001	0,0004
	8				0,0000	0,0000

Fixa-t'hi

Quan en la taula de probabilitat apareix 0,0000 significa que la probabilitat és més petita que una deumil·lèsima.

ACTIVITATS

11. Considerem la variable aleatòria que compta el nombre de boles blanques que s'obtenen en treure tres vegades una bola d'un recipient que conté 2 boles blanques i 3 de vermelles, i després d'anotar el color, tornar la bola al recipient. Calcula, fent servir la taula de la distribució binomial, la probabilitat que hagi anotat 2 boles blanques.

12. Si considerem el mateix experiment de l'activitat anterior, calcula:

a) La probabilitat que totes les boles que s'han tret siguin del mateix color.

b) La probabilitat d'obtenir alguna bola que sigui de color vermell.

4 Distribucions contínues

Quan una variable aleatòria és contínua, la seva distribució de probabilitat és també contínua. Una **distribució contínua** queda determinada si coneixem qualsevol de les funcions següents.

- Una **funció de densitat**, $f(x)$, és una funció que compleix que $f(x) \geq 0$ per a qualsevol valor de x.

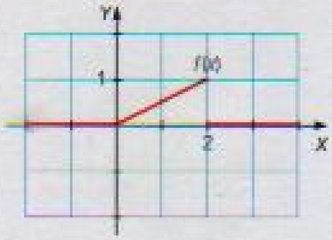
  L'àrea tancada entre la funció i l'eix d'abscisses és 1.

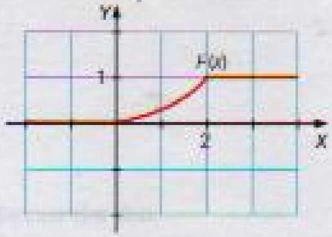
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

- La **funció de distribució**, $F(x)$, assigna a cada valor la probabilitat que la variable prengui valors inferiors o iguals que aquest.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

  El seu recorregut és $\text{Im } F = [0, 1]$ i és una funció creixent.





Recorda-ho

Si la variable és contínua, la probabilitat que sigui igual a un valor és nul·la:

$$P(X = x) = 0$$

SABER FER

Calcular la funció de distribució d'una variable aleatòria contínua a partir de la funció de densitat

▶ La funció de densitat d'una variable aleatòria contínua, X, ve donada per l'expressió següent. Calcula la funció de distribució.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en la resta} \end{cases}$$

PRIMER. S'escriu la funció de densitat com una funció definida a trossos, indicant-ne el valor en tots els intervals.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

SEGON. S'analitza el valor de la funció de distribució en cada interval.

$$\text{Si } -\infty < x < 0 \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$$

$$\text{Si } 0 \leq x \leq 2 \longrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \frac{x}{2}\,dx = 0 + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$$

$$\text{Si } 2 < x < +\infty \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} \frac{x}{2}\,dx + \int_{2}^{x} 0\,dx = 0 + 1 + 0 = 1$$

TERCER. S'escriu la funció de distribució.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

ACTIVITATS

13. Calcula el valor de k perquè la funció següent sigui de densitat, i troba'n la funció de distribució associada.

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en la resta} \end{cases}$$

14. Troba la funció de densitat d'aquesta funció de distribució.

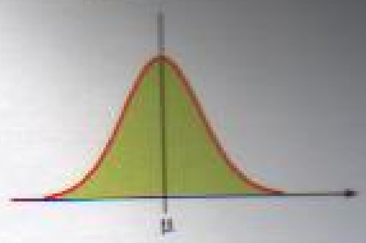
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

5 Distribució normal

Una variable aleatòria, X, segueix una **distribució** de probabilitat **normal**, i ho escrivim com $X = N(\mu, \sigma)$, quan:

- És una variable aleatòria contínua.
- Depèn de dos paràmetres, μ i σ.
  - μ = mitjana de la variable aleatòria
  - σ = desviació típica de la variable aleatòria
- La seva funció de densitat és simètrica respecte de la mitjana.

Distribució normal



La més important de totes les distribucions normals és la que té mitjana $\mu = 0$ i desviació típica $\sigma = 1$, i es denota $Z = N(0, 1)$.

Com que la mitjana és zero, llavors la funció és simètrica respecte de l'eix Y.

5.1. Tipificació

Per **tipificar un valor** d'una variable aleatòria X, primer se li resta la mitjana de la variable, i el resultat es divideix entre la desviació típica.

$$X \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Amb el procés de tipificació aconseguim transformar una variable en una altra variable que té mitjana $\mu = 0$ i desviació típica $\sigma = 1$.

Recorda-ho

Tipificant podem comparar elements que pertanyen a diferents poblacions.

EXEMPLE

3 **Segons diferents anàlisis, moblar una casa val de mitjana en una ciutat 7.500 €, amb una desviació típica de 150 €. En una altra ciutat, en canvi, el cost mitjà és de 8.000 €, amb una desviació típica de 250 €. Si a una família li donen a la primera ciutat un pressupost de 7.600 €, i a una altra a la segona de 8.100 €, quina de les dues famílies rep una oferta més bona?**

Primera ciutat → $N(7.500, 150)$ Segona ciutat → $N(8.000, 250)$

En comparar els pressupostos, la primera família rep una oferta més bona → $7.600 < 8.100$.

Si comparem cada pressupost amb el cost mitjà en la seva ciutat, els dos seran iguals, ja que tots dos estan 100 € per sobre de la mitjana.

No obstant això, si es tipifica cada un dels pressupostos i es compara:

$$7.600 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{7.600 - 7.500}{150} = 0,667 \qquad 8.100 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{8.100 - 8.000}{250} = 0,4$$

Això indica que la segona família rep una oferta més bona dins de la seva ciutat.

ACTIVITATS

15. Els ebenistes tenen un salari de 1.280 €, amb una desviació típica de 200 €, i els lampistes, de 1.060 €, amb una desviació típica de 180 €. Si a un ebenista li ofereixen un sou de 1.320 € i a un lampista un altre de 1.100 €, quin dels dos rep la millor oferta?

16. Compara les dades d'aquestes distribucions.

$x_1 = 2$ (amb $\mu = 1$, $\sigma = 2$)

$x_2 = 1$ (amb $\mu = 2$, $\sigma = 1$)

$x_3 = 1,5$ (amb $\mu = 1,5$, $\sigma = 1,5$)

5.2. Càlcul de probabilitats mitjançant taules de $N(0, 1)$

Per calcular probabilitats en una variable aleatòria que es distribueix segons una de normal $N(\mu, \sigma)$, tipifiquem la variable i després fem servir la taula de probabilitats de Z, la distribució normal $N(0, 1)$.

SABER FER

Calcular probabilitats mitjançant taules en variables aleatòries que segueixen una distribució normal

▶ El temps de recuperació, en dies, d'una grip segueix una distribució normal de mitjana 7 i desviació típica 3. Calcula:

a) La probabilitat que una persona trigui menys de 6 dies a recuperar-se.

b) La probabilitat que, en triar una persona a l'atzar, aquesta es recuperi en més de 10 dies.

PRIMER. Es defineix la variable aleatòria i s'escriuen les probabilitats demanades en funció d'aquesta variable.

La variable aleatòria, X, és el temps de recuperació de la grip d'una persona triada a l'atzar: $X = N(7, 3)$.

Les probabilitats demanades són: a) $P(X < 6)$ b) $P(X \geq 10)$

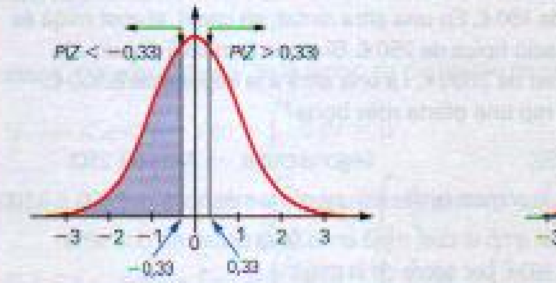
SEGON. Es tipifica la variable per utilitzar la taula de probabilitats de la distribució normal $Z = N(0, 1)$.

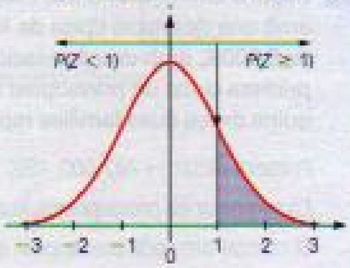
a) $P(X < 6) = P\left(\frac{X-7}{3} < \frac{6-7}{3}\right) = P(Z < -0{,}33)$

b) $P(X \geq 10) = P\left(\frac{X-7}{3} \geq \frac{10-7}{3}\right) = P(Z \geq 1)$

TERCER. La taula de probabilitats de la distribució normal $Z = N(0, 1)$ mesura la probabilitat que sigui més petit o igual que un cert nombre, $P(Z \leq a)$, i només hi apareixen nombres positius. Per això es transforma la probabilitat i els valors fins que aquests es poden trobar en la taula.

a) $P(Z < -0{,}33) = P(Z > 0{,}33) = 1 - P(Z \leq 0{,}33)$ b) $P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1)$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	[illegible]	0,6331
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

QUART. Es busca en la taula: fins al primer decimal és a la primera fila i el segon decimal és a la primera columna. La probabilitat és igual al nombre que és en la intersecció.

a) $P(Z < -0{,}33) = 1 - P(Z \leq 0{,}33) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$

b) $P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

ACTIVITATS

17. Si la variable aleatòria, X, segueix una distribució normal $X = N(5, 2)$, calcula les probabilitats següents.

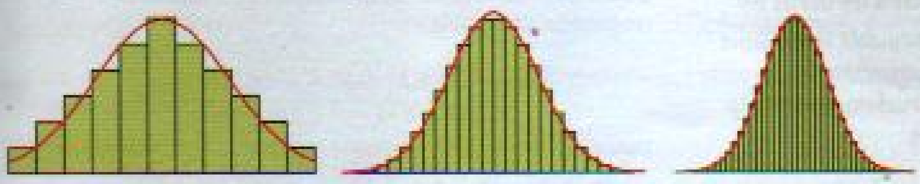
a) $P(X < 2)$
b) $P(X > 3)$
c) $P(X \leq 4)$
d) $P(X \geq 6)$
e) $P(X < 7)$
f) $P(X \leq 8)$

18. El nivell de colesterol en una persona adulta sana segueix una distribució normal $N(192, 12)$. Calcula la probabilitats que una persona adulta sana tingui un nivell de colesterol:

a) Superior a 200 unitats.
b) Entre 180 i 220 unitats.

6 Aproximació de la binomial

Quan n és prou gran, la distribució binomial es pot aproximar per una de normal de mitjana $\mu = np$ i desviació típica $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.



Com més gran és n, millor s'aproxima la distribució binomial a la normal.

A la pràctica, es considera que l'aproximació és bona quan es compleix que $np > 5$ i $n(1-p) > 5$.

SABER FER

Calcular probabilitats en una variable aleatòria binomial aproximant-la a una de normal

Un model d'avió té capacitat per a 260 passatgers. No obstant això, la companyia aèria a què pertany ha decidit vendre més bitllets que seients hi ha a l'avió. La probabilitat que un passatger es presenti a l'aeroport el dia del vol és del 95 %. Si aquest dia la companyia ha venut 280 bitllets, quina és la probabilitat que aquest dia s'hi presentin 270 passatgers?

PRIMER. S'esbrina si la variable aleatòria segueix una distribució binomial i si $n > 8$.
En aquest cas, $X = B(280; 0{,}95) \rightarrow n = 280 > 8$.

SEGON. Es comprova si es pot aproximar per una distribució normal.

$$np = 280 \cdot 0{,}95 = 266 > 5 \qquad n(1-p) = 280 \cdot 0{,}05 = 14 > 5$$

TERCER. Es calculen els paràmetres de la distribució normal a què s'aproxima.

$$\left.\begin{array}{l}\mu = np = 280 \cdot 0{,}95 = 266 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3{,}65\end{array}\right\} \rightarrow X = B(280; 0{,}95) \approx N(266; 3{,}65)$$

QUART. Es determinen cada un dels esdeveniments i es calculen les probabilitats que es demanen, tipificant la variable i fent servir la taula de distribució de la normal $Z = N(0, 1)$.

Presentar-se 270 passatgers $\rightarrow X = 270$

$$P(X = 270) = P\left(270 - \frac{1}{2} < X < 270 + \frac{1}{2}\right) = P(269{,}5 < X < 270{,}5) =$$

$$= P(X < 270{,}5) - P(X \leq 269{,}5) = P\left(Z < \frac{270{,}5 - 266}{3{,}65}\right) - P\left(Z \leq \frac{269{,}5 - 266}{3{,}65}\right) =$$

$$= P(Z < 1{,}23) - P(Z < 0{,}96) = 0{,}8907 - 0{,}8315 = 0{,}06$$

El valor obtingut és molt pròxim al que resulta fent servir la fórmula de la distribució binomial.

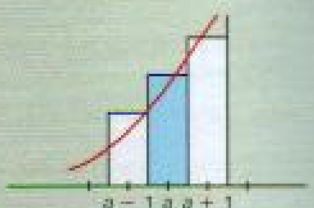
Fixa-t'hi

Quan $n > 8$, no podem trobar les probabilitats en les taules de la binomial, per la qual cosa hem de comprovar si la variable s'ha d'intentar aproximar per una de normal.

Fixa-t'hi

En passar d'una distribució binomial a una de normal, un valor de la binomial es converteix en un interval en la normal.

$$a \rightarrow \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$$



$$P(X = a) = P\left(a - \frac{1}{2} < X < a + \frac{1}{2}\right)$$

ACTIVITATS

19. Una fàbrica elabora 2.000 circuits electrònics al dia i la probabilitat que un sigui defectuós és de l'1 %. Quina és la probabilitat que es fabriquin més de 50 circuits defectuosos en un dia? I menys de 25?

20. El 10 % de les persones d'una ciutat afirma que no mira mai la televisió. Triades 100 persones a l'atzar, quina és la probabilitat que com a mínim 14 no mirin la televisió? I que siguin exactament 14?

SABER FER

Distribució binomial

Calcular els paràmetres d'una variable aleatòria que segueix una distribució binomial

La probabilitat de fer blanc en una diana de dards és $\frac{2}{5}$. Determina quin tipus de distribució segueix la variable que compta el nombre de blancs aconseguits en 8 tirades i quines són la mitjana i la variància. Calcula la probabilitat de fer blanc tres vegades.

PRIMER. Es determina la variable aleatòria i es comprova que és discreta.

X = «Nombre de blancs aconseguits en les 8 tirades»

Es tracta d'una variable discreta.

SEGON. Es defineix l'experiment i es compta el nombre de vegades que es fa.

L'experiment consisteix a llançar un dard a la diana i es repeteix 8 vegades.

TERCER. S'identifica l'esdeveniment, se'n calcula la probabilitat i es comprova que es tracta d'experiments independents.

$$A = \text{«Fer blanc en la diana»} \rightarrow p = P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

La variable segueix una distribució binomial $\rightarrow X = B(8; 0{,}4)$

QUART. Es troba la funció de probabilitat per calcular la probabilitat demanada.

$$P(X = 3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^{8-3} = 0{,}2787$$

CINQUÈ. Es determinen la mitjana i la variància de la variable.

$$\mu = np = 8 \cdot 0{,}4 = 3{,}2$$
$$\sigma^2 = np(1-p) = 8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 1{,}92$$

PRACTICA

21. **Un estudi mèdic assegura que 1 de cada 8 nens té gingivitis. Triats 7 nens a l'atzar, determina.**

a) Quin tipus de distribució segueix la variable que compta el nombre de nens amb la malaltia.

b) La probabilitat que hi hagi exactament 2 nens amb la malaltia.

c) La probabilitat que cap nen tingui la malaltia.

d) La mitjana i la variància de la variable.

Distribucions contínues

Determinar la funció de densitat d'una variable aleatòria contínua i trobar-ne la funció de distribució

Calcula la funció de distribució d'una variable aleatòria contínua, X, la funció de densitat de la qual ve donada per l'expressió següent:

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{en la resta} \end{cases}$$

PRIMER. S'utilitza la definició de funció de densitat per determinar el paràmetre.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^4 k\,dx = [kx]_0^4 = 4k - 0 = 4k \rightarrow 1 = 4k \rightarrow k = \frac{1}{4}$$

SEGON. S'analitza el valor de la funció de distribució en cada interval.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } -\infty < x < 0 \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0 \\ \text{Si } 0 \le x \le 4 \longrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^x \frac{1}{4}\,dx = 0 + \frac{x}{4} = \frac{x}{4} \\ \text{Si } 4 < x < +\infty \longrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^4 \frac{1}{4}\,dx + \int_4^x 0\,dx = 0 + 1 + 0 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

PRACTICA

22. Calcula la funció de distribució d'una variable aleatòria contínua amb aquesta funció de densitat.

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1 & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{en la resta} \end{cases}$$

23. Troba la funció de distribució d'una variable aleatòria contínua amb aquesta funció de densitat.

$$f(x) = \begin{cases} kx^3 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en la resta} \end{cases}$$

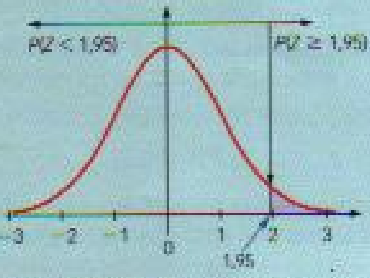
Distribució normal

Calcular la probabilitat que $Z \equiv N(0, 1)$ sigui més gran que un valor positiu

Calcula $P(Z \geq 1{,}95)$.

PRIMER. Es transforma el signe de la desigualtat, de manera que la seva probabilitat es pot trobar en la taula de la distribució normal $Z \equiv N(0, 1)$.

$$P(Z \geq 1{,}95) = 1 - P(Z < 1{,}95)$$



SEGON. Es busca el valor de Z en la taula de la normal, i es calcula la probabilitat demanada.

$$P(Z \geq 1{,}95) = 1 - P(Z \leq 1{,}95) = 1 - 0{,}9744 = 0{,}0256$$

PRACTICA

24. Calcula aquestes probabilitats.

a) $P(Z \geq 0{,}7)$ b) $P(Z \geq 1{,}73)$ c) $P(Z \geq 2{,}03)$

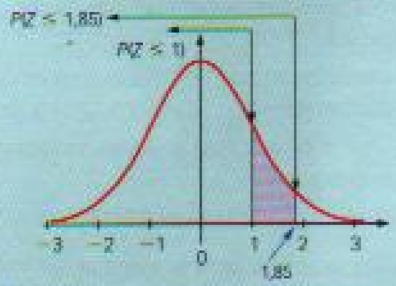
Distribució normal

Calcular la probabilitat que $Z \equiv N(0, 1)$ sigui entre dos valors

Calcula $P(1 \leq Z \leq 1{,}85)$.

PRIMER. Es transforma l'expressió en una resta de probabilitats.

$$P(1 \leq Z \leq 1{,}85) = P(Z \leq 1{,}85) - P(Z \leq 1)$$



SEGON. Es transformen els valors, si cal, per buscar la probabilitat en la taula i trobar la probabilitat que es demana.

$$P(1 \leq Z \leq 1{,}85) = P(Z \leq 1{,}85) - P(Z \leq 1) =$$
$$= 0{,}9678 - 0{,}8413 = 0{,}1265$$

PRACTICA

25. Calcula les probabilitats següents.

a) $P(0{,}2 \leq Z \leq 0{,}9)$ b) $P(-1{,}9 \leq Z \leq -1{,}2)$

Distribució normal

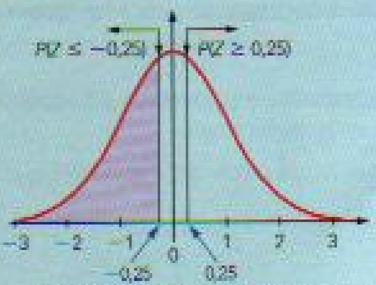
Calcular la probabilitat que $Z \equiv N(0, 1)$ sigui més petit o més gran que un valor negatiu

Calcula les probabilitats següents. a) $P(Z \leq -0{,}25)$ b) $P(Z \geq -0{,}25)$

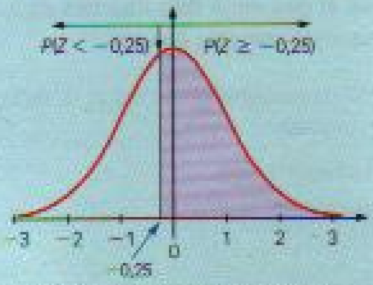
PRIMER. Es transforma el valor negatiu en positiu, fent servir la propietat de simetria de la distribució normal $Z \equiv N(0, 1)$.

a) $P(Z \leq -0{,}25) = P(Z \geq 0{,}25)$

b) $P(Z \geq -0{,}25) = 1 - P(Z < -0{,}25) = 1 - P(Z > 0{,}25)$



Més petit que un valor negatiu



Més gran que un valor negatiu

SEGON. Es busca en la taula de la normal el valor de Z que es necessita i es calcula la probabilitat que es demana.

a) $P(Z \leq -0{,}25) = P(Z \geq 0{,}25) = 1 - P(Z < 0{,}25) = 1 - 0{,}5987 = 0{,}4013$

b) $P(Z \geq -0{,}25) = 1 - P(Z < -0{,}25) = 1 - P(Z > 0{,}25) = 1 - [1 - P(Z \leq 0{,}25)] = P(Z \leq 0{,}25) = 0{,}5987$

PRACTICA

26. Calcula aquestes probabilitats. a) $P(Z \leq -1{,}3)$ b) $P(Z \geq -1{,}3)$ c) $P(Z \geq -1{,}82)$ d) $P(Z \leq -1{,}82)$

Distribució normal

Calcular un punt si en coneixem la probabilitat

Troba els valors de *a* i *b* perquè es compleixin cada una de les expressions que apareixen a continuació.

a) $P(Z < a) = 0{,}975$ **b)** $P(Z < b) = 0{,}1587$

PRIMER. Es transformen les probabilitats per poder buscar-les en la taula. Les probabilitats han de ser més grans que 0,5.

a) El valor apareix en la taula, per la qual cosa no cal fer cap transformació.

b) Com que $P(Z < b) = 0{,}1587 < 0{,}5$, es transforma de la manera següent.

$$P(Z < -b) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$$

SEGON. Es busca, dins la taula, la probabilitat. Si no apareix, es considera el valor que resulti més aproximat.

Es pren el valor que correspon a aquesta probabilitat i es calcula el valor que es demana.

a) $p = 0{,}975 \rightarrow z = 1{,}96 \rightarrow a = 1{,}96$

b) $p = 0{,}8413 \rightarrow z = 1 \rightarrow -b = 1 \rightarrow b = -1$

PRACTICA

27. Troba *a* en cada una de les expressions següents.

a) $P(Z < a) = 0{,}8907$ c) $P(Z < a) = 0{,}49$

b) $P(Z < a) = 0{,}3446$ d) $P(Z > a) = 0{,}1$

Distribució normal

Tipificar una variable aleatòria

Les qualificacions d'un grup d'alumnes tenen una mitjana de 4 amb una desviació típica de 0,5. Es tria un alumne a l'atzar. Calcula la probabilitat:

a) Que hagi obtingut una nota igual o superior a 5.

b) Que hagi obtingut una nota inferior a 3,25.

PRIMER. Es defineix la variable aleatòria i es determina la distribució normal que segueix.

La variable aleatòria *X* és la qualificació obtinguda d'un alumne triat a l'atzar. *X* segueix una distribució normal $N(4; 0{,}5)$.

Les probabilitats que es demanen són:

a) $P(X \geq 5)$ b) $P(X < 3{,}25)$

SEGON. A la variable se li resta la mitjana, i el resultat es divideix entre la desviació típica. Així, es transforma la variable en una altra que segueix una distribució $N(0, 1)$.

a) $$P(X \geq 5) = P\left(\frac{X-4}{0{,}5} \geq \frac{5-4}{0{,}5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

b) $$P(X < 3{,}25) = P\left(\frac{X-4}{0{,}5} < \frac{3{,}25-4}{0{,}5}\right) = P(Z < -1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

PRACTICA

28. Considera la variable aleatòria *X* que segueix una distribució $N(12; 0{,}6)$. Calcula $P(11{,}2 \leq X \leq 12{,}5)$.

Distribució normal

Calcular un dels paràmetres, coneixent-ne l'altre i una probabilitat

Un estudi afirma que el pes mitjà dels nounats és 2,8 kg i que només el 20 % sobrepassen els 3 kg. Quina és la desviació típica d'aquesta variable aleatòria?

PRIMER. S'identifiquen els paràmetres de la normal i s'escriu la dada coneguda de probabilitat.

X = «Pes dels nounats»

$\mu = 2{,}8$ i σ és desconegut

$P(X > 3) = 0{,}2$

SEGON. Es tipifica la dada de la probabilitat.

$$P(X > 3) = 0{,}2 = P\left(Z > \frac{3-2{,}8}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}2}{\sigma}\right)$$

TERCER. Es transforma l'expressió, si cal, per buscar la probabilitat dins de la taula de la distribució normal.

$$0{,}2 = P\left(Z > \frac{0{,}2}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0{,}2}{\sigma}\right) \rightarrow P\left(Z \leq \frac{0{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}8$$

QUART. Es busca el valor que correspon a aquesta probabilitat i es calcula el valor del paràmetre.

En la taula el valor més proper a 0,8 és 0,7995, que correspon a $Z = 0{,}84$.

Per tant:

$$\frac{0{,}2}{\sigma} = 0{,}84 \rightarrow \sigma = \frac{0{,}2}{0{,}84} = 0{,}238$$

PRACTICA

29. El diàmetre mitjà de les peces produïdes en una fàbrica és de 45 mm. Calcula la desviació típica si sabem que la probabilitat que una peça tingui el diàmetre més gran que 50 mm és igual a 0,006.

Distribució normal

Calcular la mitjana i la desviació típica si coneixem dues probabilitats

En unes oposicions, el 35 % dels qui es van presentar va obtenir una qualificació superior a 6, i el 40 % la va obtenir inferior a 4. Si les notes segueixen una distribució normal, determina'n la mitjana i la desviació típica.

PRIMER. S'escriuen les dades obtingudes en funció de la probabilitat.

X = «Qualificació obtinguda» $\rightarrow$ Segueix una distribució $N(\mu, \sigma)$. $\qquad P(X > 6) = 0{,}35 \qquad P(X < 4) = 0{,}4$

SEGON. Es tipifiquen les dades obtingudes i es transformen les expressions, si cal, per buscar les probabilitats dins de la taula de la distribució normal.

$$P(X > 6) = 0{,}35 = P\left(Z > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) \rightarrow P\left(Z \leq \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}65 \qquad P(X < 4) = 0{,}4 = P\left(Z < \frac{4-\mu}{\sigma}\right) \rightarrow P\left(Z \leq \frac{-(4-\mu)}{\sigma}\right) = 0{,}6$$

TERCER. Es busquen els valors que corresponen a aquestes probabilitats.

$$p = 0{,}65 \rightarrow z = 0{,}39 \rightarrow \frac{6-\mu}{\sigma} = 0{,}39 \qquad p = 0{,}6 \rightarrow z = 0{,}25 \rightarrow \frac{-(4-\mu)}{\sigma} = 0{,}25$$

QUART. Es forma un sistema d'equacions i es resol per obtenir la mitjana i la desviació típica.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{6-\mu}{\sigma} = 0{,}39 \\ \dfrac{-(4-\mu)}{\sigma} = 0{,}25 \end{array}\right\} \rightarrow \mu = 4{,}78125 \text{ i } \sigma = 3.125$$

PRACTICA

30. En un examen s'ha avaluat de 0 a 20 punts. El 67 % dels qui es van presentar ha obtingut puntuacions iguals o inferiors a 12,2, mentre que el 9 % ha obtingut puntuacions superiors a 16,7. Si sabem que la distribució de les puntuacions és normal, calcula la mitjana i la desviació típica.

Aproximació de la binomial

Calcular probabilitats en variables aleatòries que segueixen una distribució binomial amb *n* gran

Per accedir a un lloc d'executiu, els aspirants han de fer un test de 100 preguntes amb 5 possibles respostes. Si un respon a l'atzar, quina és la probabilitat que encerti més de 25 preguntes? I menys de 30?

PRIMER. S'identifiquen els paràmetres de la distribució binomial.

$$\left.\begin{array}{l} X = \text{«Respostes encertades de les 100 preguntes»} \\ P(\text{«Encertar una pregunta»}) = 0{,}2 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100; 0{,}2)$$

SEGON. Es comprova si es compleixen les condicions perquè es pugui aproximar la distribució binomial a una de normal.

$$\left.\begin{array}{l} np = 100 \cdot 0{,}2 = 20 > 5 \\ n(1-p) = 100 \cdot 0{,}8 = 80 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} X \text{ es pot aproximar per una normal } N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right) \\ X = B(100; 0{,}2) \approx X_N = N(20, 4) \end{array}$$

TERCER. Es calculen les probabilitats demanades, tenint en compte que s'està passant d'una variable discreta a una variable contínua i, per tant, $P(a < X < b) = P(a + 0{,}5 \leq X_N \leq b - 0{,}5)$.

$$P(X > 25) = P(X_N \geq 25{,}5) = 1 - P(X_N < 25{,}5) = 1 - P\left(Z < \frac{25{,}5-20}{4}\right) = 1 - P(Z < 1{,}38) = 1 - 0{,}9162 = 0{,}0838$$

$$P(X < 30) = P(X_N \leq 29{,}5) = P\left(Z \leq \frac{29{,}5-20}{4}\right) = P(Z \leq 2{,}38) = 0{,}9913$$

PRACTICA

31. La probabilitat que un ciclista tingui una rebentada en una cursa és de 0,15. Si en la cursa participen 70 ciclistes, quina és la probabilitat que es registrin entre 15 i 18 rebentades?

ACTIVITATS

Variables aleatòries

32. Per a cada un dels experiments aleatoris que es descriuen, troba i representa les funcions de probabilitat i de distribució.

a) Experiment aleatori:
Treure, sense reemplaçament, 3 boles d'una bossa que conté 4 boles blanques i 3 de blaves.
Variable aleatòria:
X = «Nombre de boles blanques obtingudes»

b) Experiment aleatori:
Menjar, un darrere l'altre, 2 caramels triats a l'atzar entre 2 de maduixa, 4 de taronja i 1 de menta.
Variable aleatòria:
X= «Nombre de caramels de taronja menjats»

c) Experiment aleatori:
Escollir a l'atzar una família amb 4 fills.
Variable aleatòria:
X = «Nombre de fills mascles en aquesta família» (se suposa que la probabilitat de néixer home és la mateixa que la de néixer dona)

33. Quines de les taules de probabilitats que apareixen a continuació s'ajusten a funcions de probabilitat? Troba la funció de distribució en què sigui funció de probabilitat.

a)

X	x_1	x_2	x_3
$P(X = x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$

b)

X	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{25}$

c)

X	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

d)

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$P(X = x)$	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4

34. A l'urna U_1 hi ha 4 boles numerades de l'1 al 4, i a l'urna U_2 hi ha 8 boles numerades del 5 al 12. Es llança un dau: si surt 1 o 2, es treu una bola de l'urna U_1; si surt 3, 4, 5 o 6, es treu una bola de l'urna U_2.

a) Descriu la distribució de probabilitat de la variable aleatòria que assigna a cada esdeveniment el nombre de la bola extreta.

b) Troba la funció de probabilitat, la funció de distribució i els paràmetres mitjana, variància i desviació típica d'aquesta variable.

35. En la taula es mostren les probabilitats corresponents als valors que pren una variable aleatòria X.

X	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,4	0,08	0,12	0,25	0,15

Comprova que es tracta de la seva funció de probabilitat, calcula la seva funció de distribució i fes les representacions gràfiques.

36. Amb les dades de l'activitat anterior, calcula les probabilitats següents.

a) $P(X > 3)$

b) $P(X \leq 2)$

c) $P(2 < X \leq 4)$

d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

37. Es considera la taula següent, que fa correspondre els valors que pren una variable aleatòria X a les seves probabilitats.

X	4	5	6	7
$P(X = x)$	0,6	0,2	0,15	0,05

a) Comprova que correspon a una distribució de probabilitat.

b) Calcula la funció de distribució.

c) Troba'n la mitjana i la desviació típica.

38. Amb la distribució de l'activitat anterior, determina les probabilitats següents.

a) $P(X > 4)$

b) $P(X < 6)$

c) $P(4 \leq X < 7)$

d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

39. En una urna hi ha 7 fitxes blanques, 5 fitxes vermelles i 2 fitxes grogues. Es treuen a l'atzar tres fitxes, reemplaçant cada una d'aquestes quan ja s'ha anotat el nombre de fitxes vermelles que s'han tret.

a) Troba la funció de probabilitat i la de distribució de la variable aleatòria que compta el nombre de fitxes vermelles.

b) Calcula la probabilitat d'obtenir, com a mínim, una fitxa vermella.

c) Calcula la mitjana i la desviació típica de la variable aleatòria.

40. En l'experiment aleatori que consisteix a triar a l'atzar una fitxa de dòmino, considera les variables que apareixen a continuació.

X = «Puntuació més alta de les dues que té la fitxa»
Y = «Diferència en valor absolut de les dues puntuacions que té la fitxa»

a) Troba la funció de probabilitat de X i Y.

b) Calcula la mitjana i la desviació típica per a cada una de les variables.

c) Calcula $P(X < 4)$.

d) Calcula $P(Y \geq 5)$.

41. En l'experiment aleatori que consisteix a llançar dos daus, considera la variable aleatòria que a cada esdeveniment li fa correspondre la suma de les puntuacions que han aparegut en cada un dels daus.

a) Troba la funció de probabilitat, la mitjana i la desviació típica.

b) Calcula $P(X > 9)$.

c) Calcula $P(X \leq 5)$.

42. A la bossa B_1 hi ha 4 boles numerades de l'1 al 4, i a la bossa B_2 hi ha 5 boles numerades de l'1 al 5. Es treu a l'atzar una bola de cada bossa. Es considera la variable següent.

X = «Resultat de multiplicar els nombres de les boles que s'han tret»

Troba'n la funció de probabilitat i calcula la probabilitat d'obtenir un resultat superior a 12.

Distribució binomial

43. Indica les variables aleatòries que segueixin una distribució binomial.

a) Tenim 3 fitxes blanques i 5 fitxes blaves en una bossa. En traiem 4 i comptem el nombre de fitxes que són blanques.

b) En la situació anterior traiem una fitxa, n'anotem el color i la tornem a la bossa. Repetim l'experiment tres vegades i anotem el nombre de fitxes de color blanc.

c) Llancem el dau deu vegades i anotem les vegades que surt el nombre 1.

d) Es llança un dau i, si surt un nombre parell, es torna a llançar el mateix dau, però si surt imparell es tira un dau amb forma de tetraedre i cares numerades de l'1 al 4.
Es compten les vegades que surt el nombre 3.

e) En una ciutat, el 10 % de la població té els ulls de color blau. Es trien, a l'atzar, 20 persones d'aquesta ciutat i s'anota el nombre de les que tenen els ulls blaus.

44. Fes una taula amb les probabilitats corresponents a una variable aleatòria X que compta el nombre de vegades que té lloc l'esdeveniment A, la probabilitat del qual és 0,25, en fer l'experiment 4 vegades.

45. Completa les taules a la teva llibreta i calcula la mitjana i la desviació típica en cada cas.

a)

$X = B(3; 0,9)$	0	1	2	3
$P(X = x)$				

b)

$X = B(5; 0,15)$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$						

46. En les situacions següents descobreix les variables aleatòries que segueixen una distribució binomial. Indica els paràmetres i l'esdeveniment destacat de l'experiment.

a) Un arquer professional aconsegueix anotar 10 punts en el 97 % dels casos. Fes entrenaments de 50 tirades i anota les que tenen una puntuació de 10.

b) El 12 % dels cargols fabricats per una màquina són defectuosos. Es trien 5 cargols per a les sessions de control.

c) Es llança un dau 10 vegades i s'anota el nombre de puntuacions igual a 6.

d) Es tria una família de 7 fills i es compta el nombre d'homes.

e) El 70 % dels veïns d'una localitat té néts; la resta, no. Es trien a l'atzar 20 veïns i s'anota si són avis o no.

f) La probabilitat que un estudiant que ingressa a la universitat es tituli en el mínim període de temps és de 0,3. Es trien a l'atzar 30 estudiants i se'ls pregunta pel temps esmerçat fins que es van titular.

47. Calcula les probabilitats que s'indiquen per a les distribucions binomials següents.

a) Si X és una variable $B(4; 0,3)$:
$P(X = 0)$ $P(X < 2)$ $P(X \geq 3)$

b) Si X és una variable $B(8; 0,75)$:
$P(X = 7)$ $P(X \leq 4)$ $P(X > 6)$

c) Si X és una variable $B(10; 0,42)$:
$P(X = 8)$ $P(X \leq 1)$ $P(X < 10)$

48. Fes la taula de la distribució d'una variable aleatòria X que segueix una distribució binomial $B(5; 0,8)$.

X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$						

Comprova que es verifica que $\mu = np$ i $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

49. El 2‰ de les piles que es fabriquen arriben descarregades al procés d'envasat. Si triem 12 piles a l'atzar, calcula la probabilitat que hi hagi més de 2 piles descarregades.

50. Es llança a l'aire una moneda 8 vegades. Calcula la probabilitat que surtin com a màxim 5 cares.

ACTIVITATS

51. En una fàbrica d'aixetes, els controls de qualitat detecten l'aparició d'un defecte amb una probabilitat de 0,06. Que una aixeta tingui un defecte és independent que les altres el tinguin o no. Si es trien, a l'atzar, 9 aixetes en un control, calcula la probabilitat que:

a) Com a mínim una de les aixetes tingui un defecte.

b) Cap aixeta tingui un defecte.

52. En una classe de 1r de Batxillerat hi ha el mateix nombre de nois que de noies. Si es trien 6 persones a l'atzar d'aquest grup, calcula la probabilitat que:

a) Hi hagi com a mínim tres nois.

b) No hi hagi cap noia.

c) Hi hagi exactament tres noies.

53. Fes l'activitat anterior suposant que al grup hi ha tres vegades més nois que noies.

54. El 80% dels malalts tractats amb un medicament determinat milloren fins a curar-se completament. Triats 20 malalts que tenen aquesta medicació en el seu tractament, calcula la probabilitat que més de la meitat, però menys de tres quartes parts, sanin completament.

55. Es llancen enlaire 4 daus. Ordena de més petita a més gran les probabilitats següents.

a) Que surti dues vegades la cara 5.

b) Que surti més de dues vegades la cara 5.

c) Que surti, com a mínim, una vegada la cara 5.

56. La probabilitat que un jugador de bàsquet faci una cistella de tres punts és de 0,4. Calcula la probabilitat que efectuant 5 llançaments:

a) Encistelli, exactament, 4 vegades.

b) Encistelli més de 3 vegades.

c) Encistelli, com a màxim, 2 vegades.

d) No encistelli cap vegada.

57. De cada 100 enquestats, 13 trien «NS/NC» com a resposta.

Si es trien 15 enquestats a l'atzar, calcula la probabilitat que:

a) Com a mínim, 10 responguin «NS/NC».

b) Exactament 3 no responguin «NS/NC».

58. Una de cada 12 revisions tècniques de vehicles és avaluada com a «no apta».

Si durant un dia es revisen 35 vehicles, calcula la probabilitat que:

a) Exactament 3 hagin estat avaluades com a «no apta».

b) Cap hagi esta avaluada com a «no apta».

c) Com a mínim 5 hagin estat avaluades com a «apta».

Distribucions contínues

59. Esbrina, per a cada funció $f(x)$, el valor de k perquè sigui una funció de densitat, i troba la funció de distribució corresponent.

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 4k & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{4} & \text{si } 0 \le x \le k \\ 0 & \text{si } x > k \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x + k & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$

60. Comprova que $f(x)$ és una funció de densitat, troba'n la funció de distribució i calcula les probabilitats que s'indiquen.

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } x \in [2, 8] \\ 0 & \text{en la resta} \end{cases}$$

a) $P(X < 3)$ b) $P(3 \le X \le 5)$ c) $P(x > 6)$

61. Comprova que $f(x)$ és una funció de densitat, troba'n la funció de distribució i calcula les probabilitats que s'indiquen.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{10} & \text{si } x \in [1, 5] \\ 0 & \text{en la resta} \end{cases}$$

a) $P(X < 2)$ b) $P(1{,}5 \le X \le 4)$ c) $P(x > 3)$

62. Comprova si la funció següent és de densitat i calcula les probabilitats que s'indiquen a continuació.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2} & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

a) $P\left(0 \le X \le \dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $P\left(\dfrac{\pi}{2} \le X\right)$ c) $P\left(\dfrac{\pi}{3} \le X \le 4\right)$

63. La funció de densitat d'una variable aleatòria contínua és la següent.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

Troba'n la funció de distribució i aquestes probabilitats.

a) $P(0{,}5 < X < 1{,}5)$
b) $P(1 < X < 2)$
c) $P(X < 1{,}5)$
d) $P(X > 1{,}2)$

64. La funció de distribució d'una variable aleatòria contínua és la següent.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x-1}{3} & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Determina aquestes probabilitats.

a) $P(2 \le X \le 3)$
b) $P(X \le 3)$
c) $P(1{,}5 \le X \le 2{,}5)$
d) $P(X > 2)$

65. Una variable aleatòria té la funció de distribució següent.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 3) \\ \dfrac{x^2 + x - 12}{8} & \text{si } x \in [3, 4] \\ 1 & \text{si } x \in (4, +\infty) \end{cases}$$

Calcula aquestes probabilitats.

a) $P(3 \le X \le 4)$
b) $P(3{,}5 \le X < 3{,}6)$
c) $P(X \le 3{,}5)$
d) $P(X > 3{,}8)$

Distribució normal

66. Calcula les probabilitats que apareixen a continuació per a la distribució $N(0, 1)$.

a) $P(Z < 0{,}6)$
b) $P(Z \le 0{,}92)$
c) $P(Z < 1{,}3)$
d) $P(Z \le 2{,}4)$
e) $P(Z < 1{,}23)$
f) $P(Z \le 2{,}01)$
g) $P(Z \le 0{,}07)$
h) $P(Z < 0{,}31)$

67. En la distribució $N(0, 1)$, calcula les probabilitats que apareixen a continuació.

a) $P(Z \ge 0{,}68)$
b) $P(Z > 0{,}9)$
c) $P(Z > 1{,}5)$
d) $P(Z \ge 2)$
e) $P(Z = 1{,}2)$
f) $P(Z > 1{,}6)$
g) $P(Z > 0{,}03)$
h) $P(Z \ge 2{,}21)$

68. Calcula el valor d'aquestes probabilitats de la distribució $N(0, 1)$.

a) $P(Z \le -0{,}4)$
b) $P(Z \le -1{,}62)$
c) $P(Z < -2{,}3)$
d) $P(Z = -2{,}05)$
e) $P(Z < -2{,}5)$
f) $P(Z \le -1{,}76)$
g) $P(Z < -0{,}13)$
h) $P(Z \le -1{,}07)$

69. En la distribució $N(0, 1)$, calcula les probabilitats que apareixen a continuació.

a) $P(Z > -1{,}27)$
b) $P(Z \ge -2{,}02)$
c) $P(Z > -1{,}35)$
d) $P(Z \ge -2)$
e) $P(Z = -0{,}2)$
f) $P(Z \ge -1{,}04)$
g) $P(Z > -0{,}09)$
h) $P(Z \ge -2{,}31)$

70. Troba cada una de les probabilitats següents de la distribució $N(0, 1)$.

a) $P(Z > 1{,}11)$
b) $P(Z \le -0{,}93)$
c) $P(Z \ge 2{,}29)$
d) $P(Z = 0)$
e) $P(Z < -0{,}33)$
f) $P(Z > 0{,}45)$
g) $P(Z \le -1)$
h) $P(Z \ge -2{,}11)$

71. Donada la distribució $N(0, 1)$, calcula les probabilitats següents.

a) $P\left(Z \le \frac{1}{2}\right)$
b) $P\left(Z \ge -\frac{3}{4}\right)$
c) $P\left(Z > \frac{7}{3}\right)$
d) $P\left(Z < -\frac{10}{6}\right)$
e) $P\left(Z \le \frac{4}{7}\right)$
f) $P\left(Z \ge \frac{5}{2}\right)$

72. En la distribució $N(0, 1)$, calcula les probabilitats que hi ha a continuació.

a) $P(0{,}4 < Z \le 1{,}8)$
b) $P(-0{,}6 \le Z \le 0{,}93)$
c) $P(-1{,}51 \le Z < -0{,}64)$
d) $P(-2{,}31 < Z \le 0)$

73. En la distribució $N(0, 1)$, calcula les probabilitats que hi ha a continuació.

a) $P(-1{,}8 < Z \le 1{,}8)$
b) $P(-2{,}06 \le Z \le 2{,}06)$
c) $P(-1{,}51 \le Z < 1{,}51)$
c) $P(0 < Z \le 1{,}96)$

74. Troba el valor de k perquè es verifiquin les igualtats en la distribució $N(0, 1)$.

a) $P(Z < k) = 0{,}9599$
b) $P(Z > k) = 0{,}9375$
c) $P(Z > k) = 0{,}3085$
d) $P(Z < k) = 0{,}0256$
e) $P(Z \le k) = 0{,}4364$
f) $P(Z > k) = 0{,}5557$

75. Troba $a, b, c\ldots$, perquè en una distribució normal $N(108, 16)$ es compleixi el següent.

a) $P(X < a) = 0{,}8849$
b) $P(X < b) = 0{,}9972$
c) $P(X < c) = 0{,}3632$
d) $P(X \ge d) = 0{,}0495$
e) $P(X \ge e) = 0{,}5987$
f) $P(X \le f) = 0{,}7717$

76. Troba el valor de k perquè es verifiquin les igualtats en la distribució $N(0, 1)$.

a) $P(-k < Z < k) = 0{,}8414$
b) $P(-k < Z < k) = 0{,}0398$
c) $P(-k < Z < k) = 0{,}383$
d) $P(-k < Z < k) = 0{,}4448$
e) $P(-k < Z < k) = 0{,}8664$
f) $P(-k < Z < k) = 0{,}9426$

77. Determina els extrems de l'interval simètric respecte de la mitjana μ que conté el percentatge indicat de les observacions de cada una de les distribucions $N(\mu, \sigma)$.

a) Conté el 90 % per a $N(15, 3)$.
b) Conté el 68 % per a $N(48, 7)$.
c) Conté el 84 % per a $N(70, 15)$.

78. Troba el valor de k perquè es compleixin les igualtats en la distribució $N(0, 1)$.

a) $P(k < Z < 2k) = 0{,}0761$

b) $P(-k < Z < 3k) = 0{,}1574$

c) $P(-2k < Z < k) = 0{,}9318$

d) $P(-5k < Z < -2k) = 0{,}1891$

79. En la distribució $N(25, 4)$, calcula aquestes probabilitats.

a) $P(X < 22)$

b) $P(X \geq 27{,}3)$

c) $P(X \leq 28{,}4)$

d) $P(X \geq 18{,}04)$

e) $P(24 < X \leq 30)$

f) $P(20 \leq X < 23)$

80. En la distribució $N(80, 11)$, calcula les probabilitats que apareixen a continuació.

a) $P(X < 86)$

b) $P(X \geq 88)$

c) $P(X \leq 75)$

d) $P(X \geq 68)$

e) $P(67 < X \leq 77)$

f) $P(76 \leq X < 85)$

81. Calcula, en cada cas, μ i σ d'una distribució $N(\mu, \sigma)$ si sabem que:

a) $P(X \leq 22) = 0{,}6915$
$P(X < 8) = 0{,}9938$

b) $P(X > 25) = 0{,}1056$
$P(X > 4{,}8) = 0{,}9332$

82. La talla d'un grup de persones segueix la distribució normal amb una mitjana de 165 cm i una desviació típica de 12 cm. Calcula la probabilitat que una persona triada a l'atzar:

a) Faci més de 170 cm.

b) Faci menys de 168 cm.

c) Faci entre 159 i 172 cm.

83. El pes dels llobarros de piscifactoria, mesurat en grams, es distribueix segons una normal $N(900, 200)$. Cada dia se'n treuen 100 exemplars per consumir-los.

a) Determina el nombre de llobarros que pesen més de 980 kg.

b) Calcula el percentatge dels que pesen entre 750 i 1.100 g.

c) Completa a la teva llibreta:
«Els 20 llobarros més petits pesen menys de…».

d) Completa a la teva llibreta:
«La quarta part formada pels més grossos pesen més de…».

84. El pes de les pomes es distribueix normalment amb una mitjana de 175 g i una desviació típica de 25 g. Un majorista ha comprat 15.000 kg de pomes.

a) Quina quantitat de pomes espera que pesin menys de 168 g?

b) Quin percentatge pesarà entre 170 i 180 g?

c) Si vol fer dos grups, un amb les que pesen menys de 160 g i l'altre amb la resta, quants quilos hi haurà a cada grup?

d) Si, per contra, un dels grups està format per la quarta part de pomes que pesen més, a partir de quin pes farà la separació?

85. Els pesos dels esportistes d'un club de natació segueixen una distribució amb una mitjana de 75 kg i una desviació típica de 4 kg. Calcula la probabilitat que un esportista triat a l'atzar:

a) Pesi menys de 72 kg, però més de 70 kg.

b) Pesi entre 78 i 80 kg.

c) Pesi, com a mínim, 81 kg.

86. El temps de vida de les bombetes d'una empresa, mesurat en hores, es distribueix segons una normal $N(5.000, 120)$. Calcula quin percentatge de les bombetes:

a) Durarà més de 5.200 hores.

b) Durarà entre 5.040 i 5.070 hores.

c) Durarà entre 5.145 i 5.230 hores.

87. Se sap que el 93,7 % de les camises d'una marca es fabriquen en un temps inferior a 7 hores. Si el temps de fabricació es distribueix amb una mitjana de 6,5 hores, calcula'n la desviació típica.

88. En una ciutat la temperatura màxima el mes de juliol segueix una distribució normal de mitjana 32 °C i una desviació típica de 4 °C. Calcula quants dies se superen els 37 °C i quants no se superen els 35 °C.

89. Una màquina que fabrica discos compactes aconsegueix fabricar el 90 % d'unitats sense error. Si triem a l'atzar 100 discos, calcula aquestes probabilitats.

a) Que n'hi hagi dos de defectuosos.

b) Que n'hi hagi més d'un de defectuós.

90. Un examen de tipus test consta de 50 preguntes amb tres possibles respostes, i només una d'aquestes és correcta. Si es duu a terme l'examen responent a l'atzar, calcula.

a) La probabilitat que es respongui correctament a més de 4 preguntes.

b) La probabilitat que es respongui correctament a menys de 10 preguntes.

c) La probabilitat que s'aprovi l'examen (per fer-ho cal respondre correctament a 25 o més preguntes).

91. En un laboratori d'anàlisis clíniques saben que el 70 % de les proves d'anèmia que fan resulten negatives. Si han rebut 60 mostres per analitzar, respon.

a) Quina és la probabilitat que hi hagi menys de 5 persones a qui els doni positiu?

b) Quina és la probabilitat que la prova resulti positiva a una persona o més?

92. S'està experimentant una nova vacuna per a la malària que resulta efectiva en el 60 % dels casos. Si es trien a l'atzar 200 persones, troba les probabilitats següents.

a) Que en aquest grup la vacuna sigui efectiva per a 30 persones.

b) Que la vacuna sigui efectiva per a més de 80, però menys de 120 persones.

c) Que la vacuna sigui efectiva en 90 o menys persones.

93. Les companyies d'assegurances han calculat que 1 de cada 5 vehicles té un accident a l'any. Si es prenen a l'atzar 40 vehicles, determina:

a) La probabilitat que aquest any 10 d'aquests vehicles tinguin un accident.

b) La probabilitat que siguin entre 10 i 12 vehicles, tots dos nombres inclosos.

c) Quina és la probabilitat que aquest any s'accidentin més de 15 vehicles?

Problemes amb distribucions de probabilitat

94. Un fabricant de corretges per a rellotges ha estudiat que el contorn del canell dels homes segueix una distribució normal la mitjana de la qual és 20,5 cm i la desviació és d'1,5 cm.

a) Quin percentatge de la població té un contorn de canell de més de 23 cm?

b) Si es fabriquen corretges que fan entre 17 i 22 cm, quin percentatge de la població les podrà fer servir?

c) Es pretén reduir costos fabricant menys varietat de longituds de corretges. Troba un interval $(20{,}5 - a;\ 20{,}5 + a)$ en què s'inclogui el 95 % dels homes.

95. Només el 10 % dels bitllets d'una tómbola tenen premi. Què és més fàcil, tenir dos premis comprant 10 bitllets o aconseguir un premi comprant-ne 3?

96. Tria, entre els jocs a) i b), aquell en què tinguis més probabilitats de guanyar.

a) Es llancen 2 daus i, si la suma és més gran que 9, guanyes.

b) Es llancen 10 monedes i guanyes si surten més de 6 cares.

97. Sabem que el 98,61 % dels cargols fabricats per una empresa té un diàmetre inferior a 3,398 mm. Si el diàmetre dels cargols es distribueix segons una normal de mitjana 3,2 mm, determina'n la desviació típica.

98. La distribució d'edats dels membres d'una associació segueix una llei normal $N(\mu, \sigma)$. Si sabem que el 94,52 % té menys de 32 anys, i el 21,19% en té menys de 20, calcula'n la mitjana i la desviació típica.

99. Dos amics estan jugant al parxís. Un d'ells assegura que ha tirat el dau 30 vegades i no li ha sortit cap 5. L'altre amic afirma que això és impossible. És realment impossible? Quina és la probabilitat que passi això?

100. En un institut s'han comprat 150 ordinadors per a 4 aules d'informàtica. La durada de la bateria permet tenir una mitjana de treball de 180 minuts, amb una desviació típica de 25 minuts.

a) Calcula la probabilitat que la bateria d'un dels ordinadors només duri 2 hores.

b) Quants ordinadors tindran una bateria la càrrega de la qual duri més de 200 minuts?

c) Quina és la probabilitat que 110 d'aquests ordinadors continuïn treballant al cap de 180 minuts?

101. El pes dels nounats es distribueix segons una distribució normal de mitjana μ i desviació típica σ. Si les últimes dades publicades asseguren que els percentils 75 i 90 d'aquesta distribució són 3,2 i 3,5 kg, respectivament:

a) Calcula la probabilitat que un nounat pesi menys de 2,5 kg.

b) Troba la probabilitat que un nounat pesi més de 4 kg.

c) Quin és el percentil 10?

d) Determina la mitjana de la distribució.

102. El sou dels treballadors d'una empresa segueix la distribució normal de mitjana 1.500 €. Si el sou d'un tècnic de categoria 3 és de 960 €, i el 75 % dels treballadors de l'empresa cobra més que ell:

a) Calcula la probabilitat que el sou d'un treballador triat a l'atzar sigui superior a 1.600 €.

b) El sou més elevat és el dels directius. Si representen el 5 % dels treballadors de l'empresa, quin és el seu sou mínim?

103. En una granja de gallines es classifiquen els ous pel pes que tenen en grams, segons les categories incloses en la taula.

Categoria	S	M	L	XL
Pes	< 53	$[53, 63)$	$[63, 73)$	≥ 73

El pes dels ous de les gallines d'aquesta granja segueix la distribució $N(62, 8)$. Calcula els percentatges d'ous que s'obtenen de cada categoria.

MATEMÀTIQUES A LA TEVA VIDA

PER A QUÈ SERVEIX LA DISTRIBUCIÓ NORMAL?

Per estudiar qualitats de poblacions molt grans

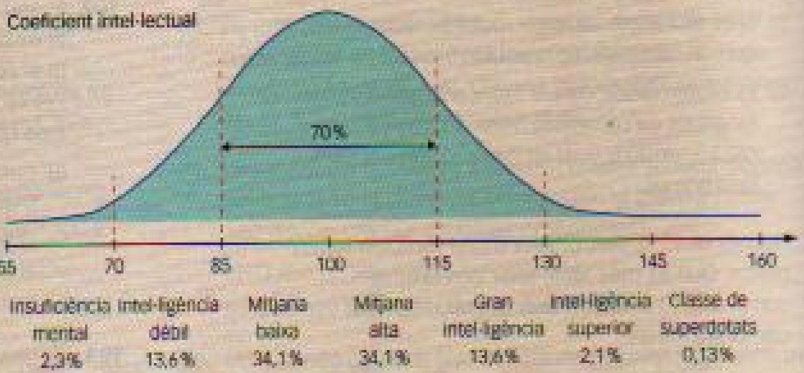
A la natura apareixen infinitat de casos en què la realitat es pot aproximar numèricament a una distribució normal i, més gràficament, a una campana de Gauss.

Per exemple, l'alçada d'un grup de persones. Si comencem amb estatures molt baixes, hi ha poques persones que tinguin aquesta estatura tan petita, i a mesura que l'augmentem hi ha més persones que compleixen aquestes mides. Això passa fins que s'arriba al que considerem una estatura *normal*, que és l'estatura de gran part de les persones que coneixem.

A partir d'aquesta estatura *normal*, si la seguim augmentant, el nombre de persones que la compleixen disminueix a mesura que augmentem els centímetres d'estatura. És obvi que hi ha molt poca gent amb l'alçada de Pau Gasol, per això el gràfic torna a tendir a decréixer.

Doncs passa el mateix amb la intel·ligència. Quan es duu a terme un test per obtenir el coeficient intel·lectual (CI) sobre una mostra poblacional i se situa aquesta puntuació en un gràfic, si la mostra és realment aleatòria, es pot comprovar que efectivament es compleix una distribució normal.

De fet, aquest és el gràfic del CI de la població espanyola.



LLEGEIX I COMPRÈN

1. Busca informació i troba tres situacions que responguin a una distribució normal.

INTERPRETA

2. Segons aquestes dades, podem afirmar que hi ha menys persones amb un CI de 115 que de 110? I quina relació hi ha entre el nombre de persones amb un coeficient de 85 i entre les que el tenen de 115?

REFLEXIONA

3. Quin és el valor més baix que pot prendre la funció per l'esquerra? I el més baix que pot prendre per la dreta?

APLICA

4. Si sabem que a Espanya hi ha 46,77 milions d'habitants, quantes persones tenen una intel·ligència per sobre de la que es considera *superior*?