Table of Contents

1 Introducción....2
2 Vectores y ondas....6
3 Adición de vectores básica....9
4 Adición de vectores avanzada....12
5 Notación polar y rectangular....13
6 Aritmética de los números complejos....19
7 Polaridad en AC....22
8 Ejemplos con circuitos de CA....27

1 Introducción

La distancia entre dos ciudades se puede indicar con un único número en millas, kilómetros o cualquier otra unidad de medida lineal. Sin embargo, si se quisiera describir cómo viajar de una ciudad a otra, no basta con dar la distancia entre las ciudades, sería necesario también dar información sobre la dirección a tomar para llegar a la ciudad de destino.

El tipo de información que expresa una sola dimensión, como la distancia lineal, en matemáticas se denomina magnitud escalar.

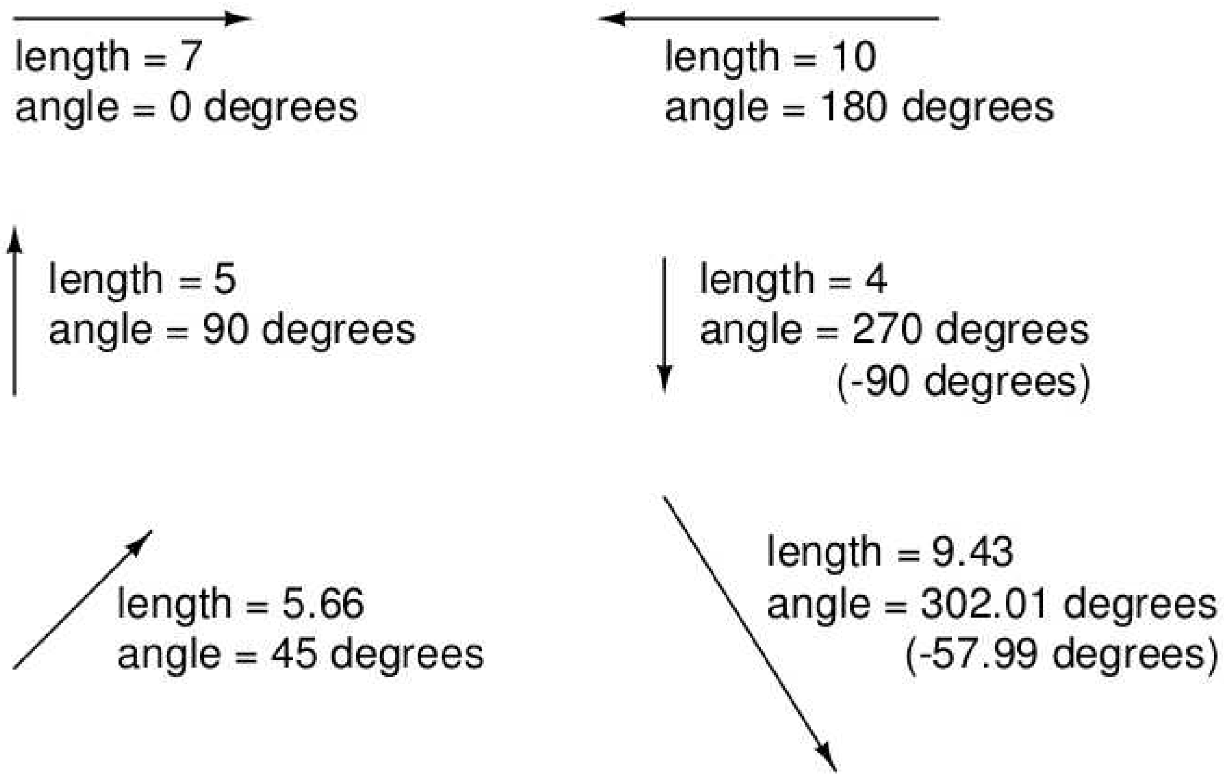
Las magnitudes escalares son el tipo de números que se utilizan en la mayoría los cálculos matemáticos básicos. El voltaje producido por una batería, por ejemplo, es una magnitud escalar. También lo es la resistencia de un cable (ohmios) o la corriente que lo atraviesa (amperios).

Sin embargo, al analizar circuitos de corriente alterna, las tensiones, corrientes e incluso resistencias (llamadas impedancias en CA), no son magnitudes unidimensionales como las utilizadas habitualmente en CC. Estas magnitudes, son dinámicas, varian su dirección y amplitud en función del tiempo. Por ello poseen otras dimensiones que hay que tener en cuenta. La frecuencia y el desfase son dos de las dimensiones a considerar.

Incluso en circuitos de corriente alterna relativamente sencillos, con una única frecuencia, además de la amplitud hay que tener en cuenta el desfase. Para analizar los circuitos de corriente alterna, es utilizar objetos matemáticos y técnicas capaces de representar estas nuevas dimensiones. Las magnitudes escalares deben ser sustituidas por los números complejos.

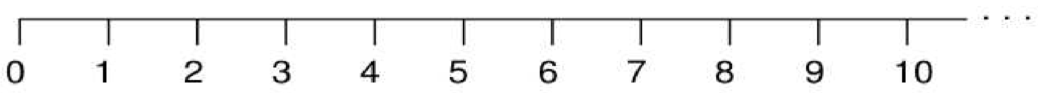
Anteriormente se dio el ejemplo del viaje de una ciudad a otra, en el que es necesario tener información sobre la distancia y la dirección entre las ciudades. En un circuito de CA de frecuencia única, será necesario indicar información sobre la amplitud (análoga a la distancia) y el desfase (análogo a la dirección). Un número complejo expresa las dimensiones de amplitud y desfase.

Los números complejos son fáciles de entender representándolos gráficamente. Una línea con una longitud (amplitud) y un ángulo (dirección) determinados, es la representación gráfica de un número complejo, también se conoce como vector.

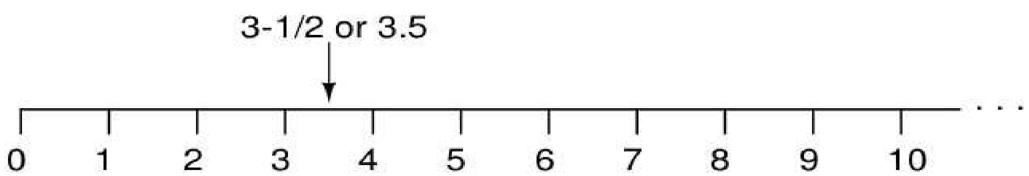


Al igual que las distancias y las direcciones en un mapa, debe existir un marco de referencia común para que las cifras angulares tengan algún significado. En el ejemplo de la imagen anterior, se define que el ángulo de una línea horizontal que señala hacia la derecha derecha es 0, y que los ángulos se cuentan en sentido positivo al girar en sentido contrario a las agujas del reloj.

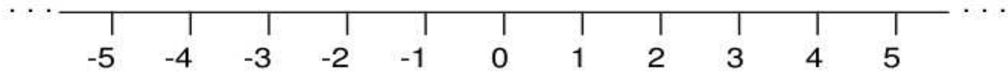
La idea de representar un número de forma gráfica no es nueva, es una representación conocida como la "recta numérica" .



Los valores entre los números enteros de la recta son las fracciones o número decimales.



La recta numérica también se extendiende a la izquierda del cero con los números negativos.



Estos conjuntos numéricos (enteros, racionales, irracionales, reales, etc.) comparten un rasgo común: todos son unidimensionales. La rectitud de la recta numérica ilustra esto gráficamente. Es posible moverse hacia arriba o hacia abajo por la recta numérica, pero todo "movimiento" a lo largo de esa línea se limita a un solo eje (horizontal). Los números escalares unidimensionales son perfectamente adecuados para hacer cuentas, indicar el peso o medir el voltaje de una batería de CC, pero no sirven para representar algo más complejo, como la amplitud y fase de una onda de corriente alterna.

Para representar este tipo de cantidades, es necesaria una representación multidimensional. Esto es una recta numérica que pueda apuntar en diferentes direcciones, un vector.

Resumen

- Un número escalar se acostumbrada a utilizar en la vida cotidiana para indicar una cantidad unidimensional como la temperatura, la longitud, el peso, etc.
- Un número complejo representa dos dimensiones, magnitud (amplitud) y dirección.
- Un vector es una representación gráfica de un número complejo. Se dibuja una flecha, con un punto de partida, un punto final (punta de la flecha), una longitud y una dirección definidas. También se denomina como *fasor* en aplicaciones eléctricas, en las que el ángulo del vector representa el desfase entre ondas.

2 Vectores y ondas

La longitud del vector representa la magnitud (o amplitud) de la forma de onda, como muestra la imagen.

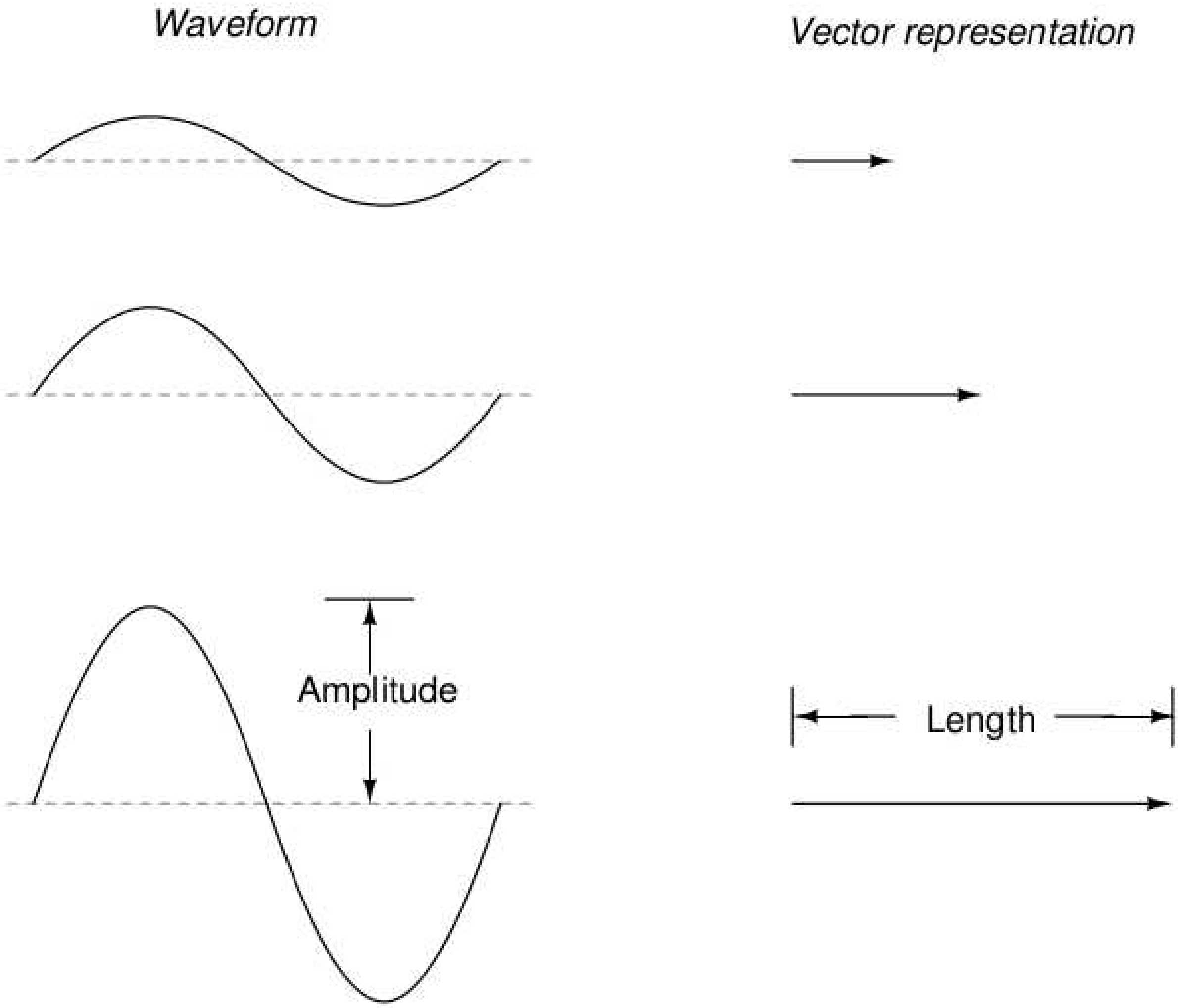


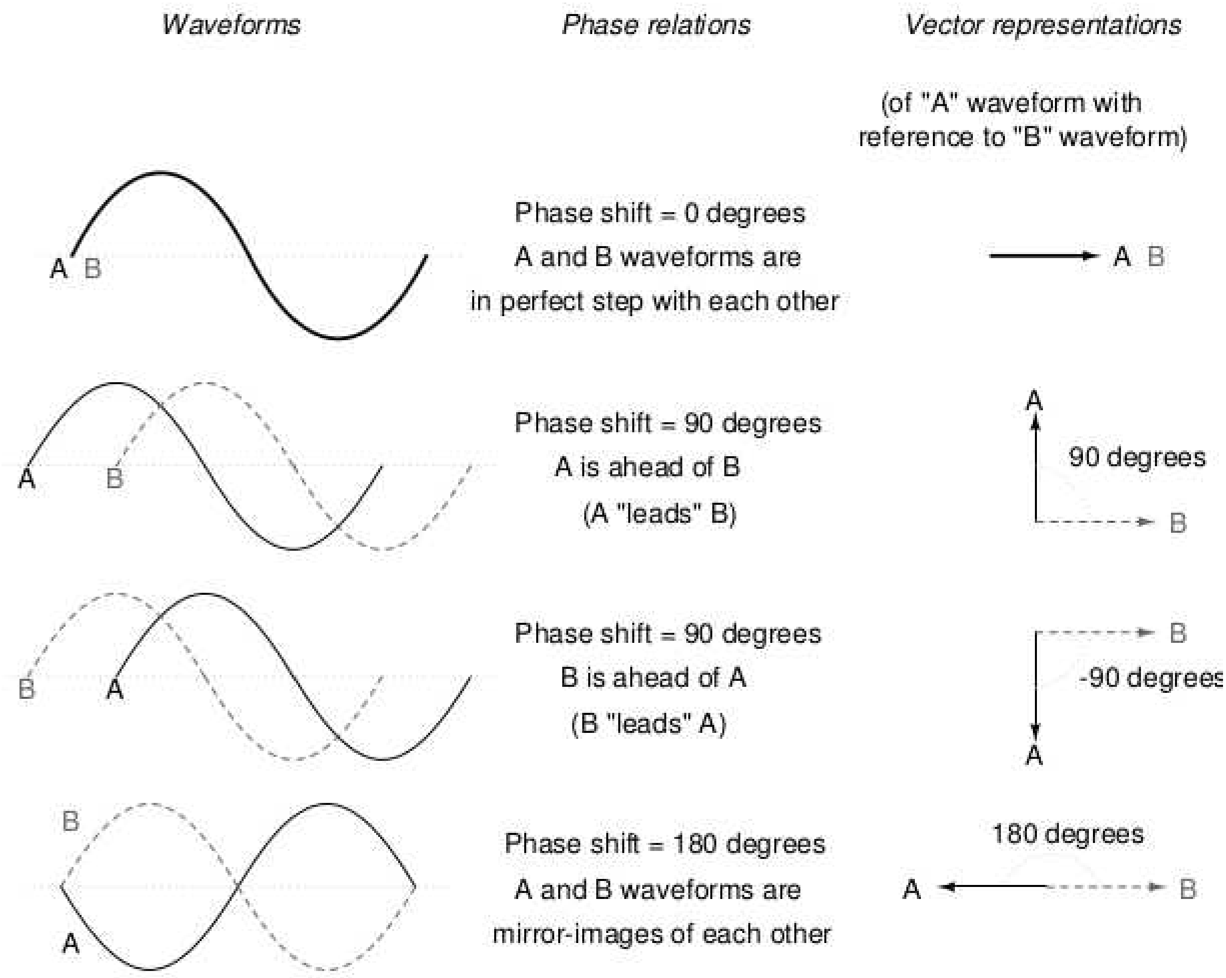
Figure 2.7: *Vector length represents AC voltage magnitude.*

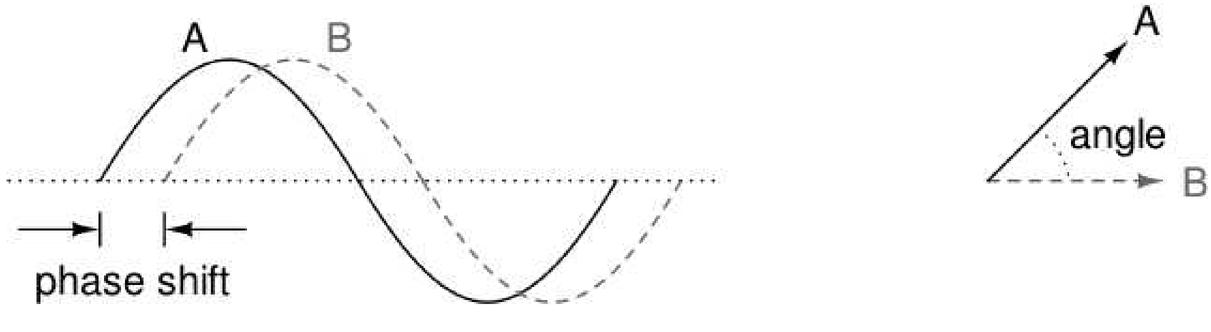
Cuanto mayor sea la amplitud de la onda, mayor será la longitud del vector correspondiente. Sin embargo, el ángulo del vector representa el desfase en grados entre dos ondas. Una de las ondas se toma como referencia.

Cuando se expresa la fase de una onda en un circuito, se hace referencia a la onda de la tensión de alimentación (arbitrariamente establecida como a 0º). La fase es una medida relativa entre dos ondas, no una propiedad absoluta.

Cuanto mayor sea el desfase en grados entre dos ondas, mayor será el ángulo entre los vectores correspondientes. Siendo una medida relativa, al igual que el voltaje, el desfase (ángulo entre vectores) sólo tiene un significado respecto a la onda de referencia.

Por lo general, la onda de referencia es la tensión de alimentación de CA principal del circuito. Si hay más de una fuente de tensión alterna, entonces se elige arbitrariamente una de esas fuentes para que sea la referencia de fase de todas las demás ondas del circuito.





El concepto de punto de referencia es similar a la tierra (o masa) en un circuito como referencia de tensión. Con un punto claramente definido en el circuito declarado como tierra, es posible hablar de tensión en puntos concretos del circuito, entendiéndose que esas tensiones (siempre relativas entre dos puntos) están referenciadas a "tierra".

Del mismo modo, con un punto de referencia claramente definido para la fase, es posible hablar de tensiones y corrientes en un circuito de corriente alterna con ángulos de fase definidos. Por ejemplo, si la corriente en un circuito de CA se indica con 24,3 miliamperios a -64 grados, significa que la onda de la corriente tiene una amplitud de 24,3 mA y va 64 grados por detrás de la onda de referencia, que suele ser la onda de la tensión de la fuente de alimentación principal.

Resumen

- Las magnitudes en circuitos de CA se representan mediante vectores. La longitud de los vectores representan las amplitudes de las ondas, mientras que los ángulos entre los vectores representa los desfases respecto a la onda de referencia.

3 Adición de vectores básica

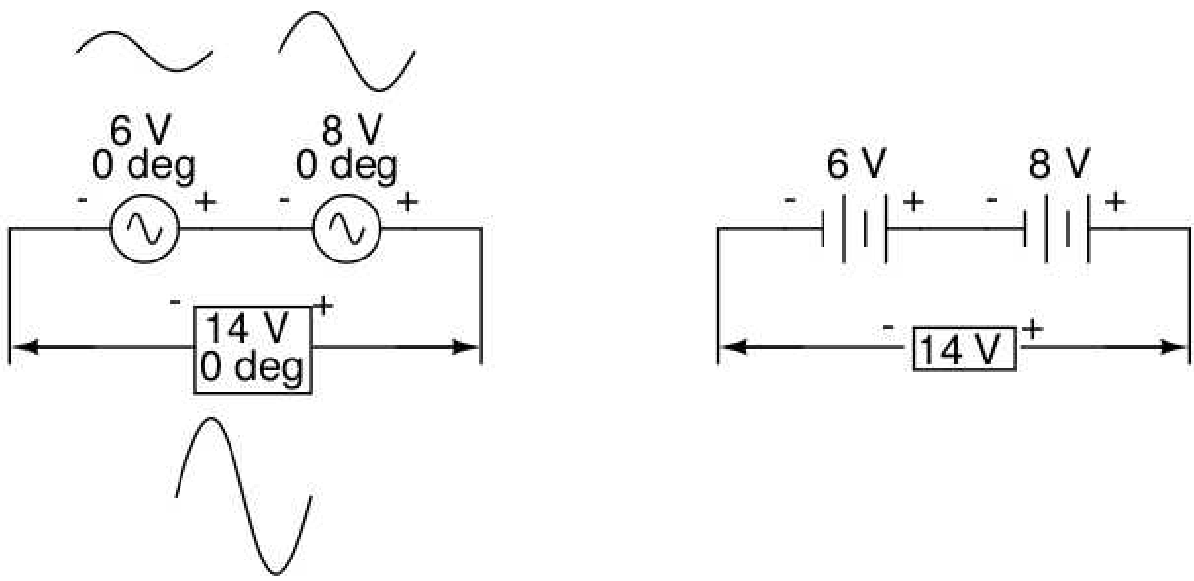
Los vectores son objetos matemáticos como los números en una recta numérica: se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir.

La suma es la operación vectorial más fácil de visualizar. Si se suman vectores con ángulos idénticos, sus magnitudes (longitudes) se suman igual que las cantidades escalares normales.

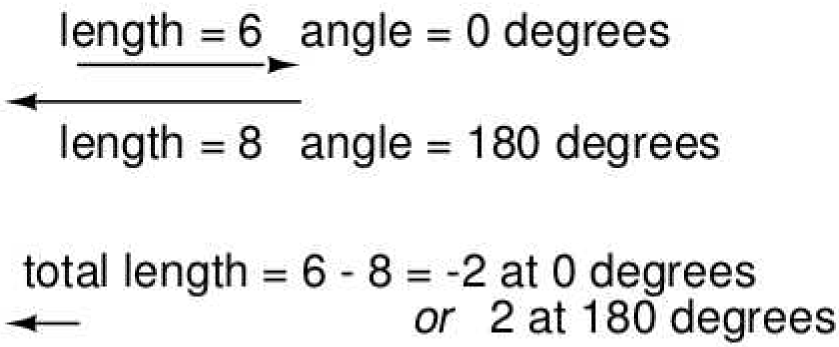
Del mismo modo, si se conectan en serie fuentes de tensión alterna con el mismo ángulo de fase,

sus tensiones se suman tal como ocurre con baterías de CC.

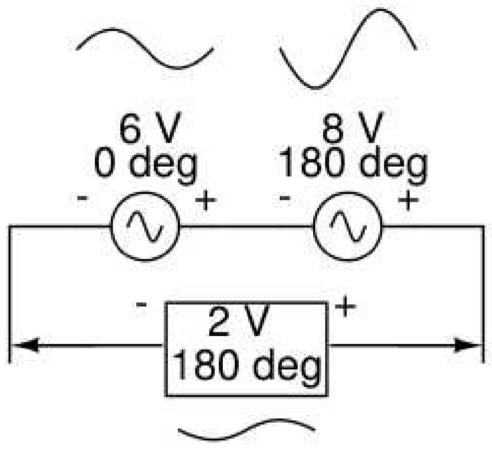
Los contactos de las fuentes de CA están marcados con las polaridades (+) y (-). Aunque en CA no existe la polaridad en el mismo sentido que en CC, estas marcas tienen sentido para indicar los ángulos de fase de las tensiones.

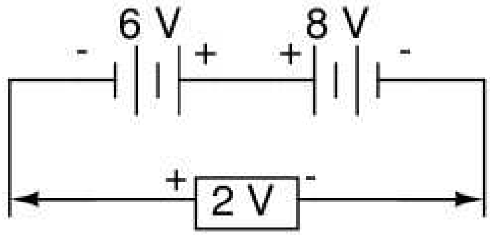


Si el desfase de los vectores es de 180º, sus magnitudes (longitudes) se suman igual que si fueran valores escalares positivos y negativos.



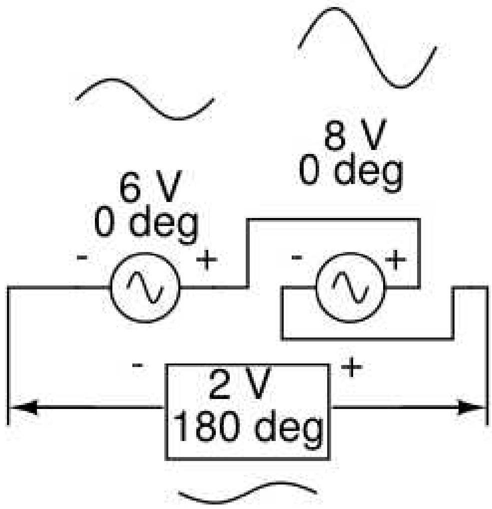
Del mismo modo, si se conectan en serie fuentes de tensión alterna opuestas, sus tensiones se restan como si fueran baterías de CC conectadas en serie con polaridad opuesta.

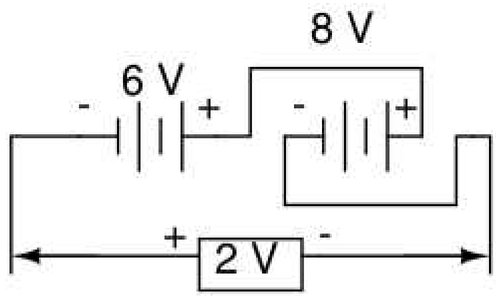




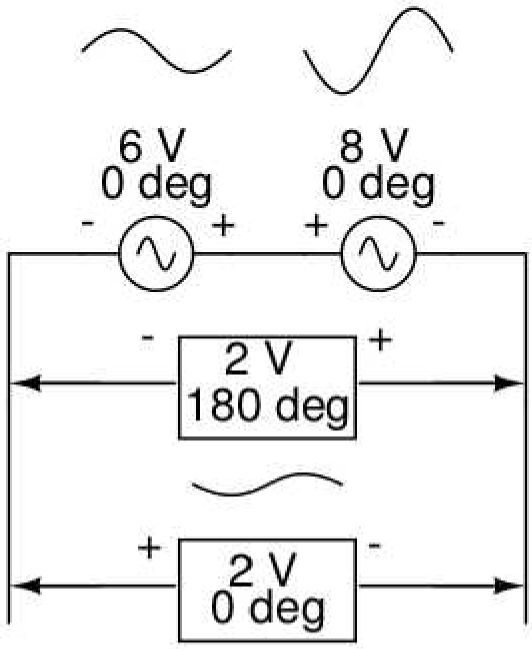
Para determinar si estas fuentes de tensión son o no opuestas, es necesario observar sus polaridades y ángulos de fase. Las polaridades parecen indicar una suma de tensiones (de izquierda a derecha, vemos - y + en la fuente de 6 voltios, - y + en la de 8 voltios). A pesar de que estas polaridades en un circuito de CC significan una suma de tensiones, aumentando el voltaje total, en este circuito de CA están señalando en direcciones opuestas porque uno de esos voltajes tiene un ángulo de fase de 0º y el otro un ángulo de fase de 180º. El resultado es una tensión total de 2 voltios en dirección del voltaje mayor, es decir, con un águlo de fase de 180º.

Se podrían haber representado las tensiones en serie con polaridades opuestas, obteniendo el mismo resultado.



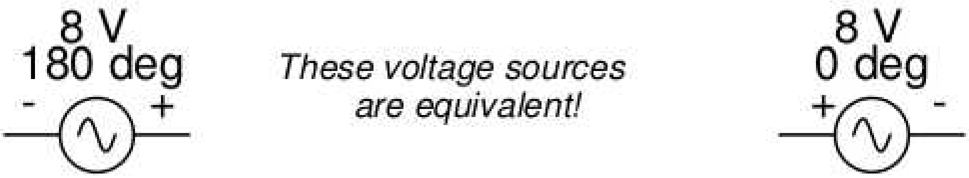


Las polaridades parecen estar opuestas ahora, debido a la inversión de las conexiones en la fuente de 8 voltios. En esta representación, ambas fuentes están en fase, su ángulo de fase es idéntico 0º, sin embrago sus polaridades son contrarias y el resultado es el mismo que el de la representación anterior, en el que las polaridades eran iguales, pero el desfase de 180º.



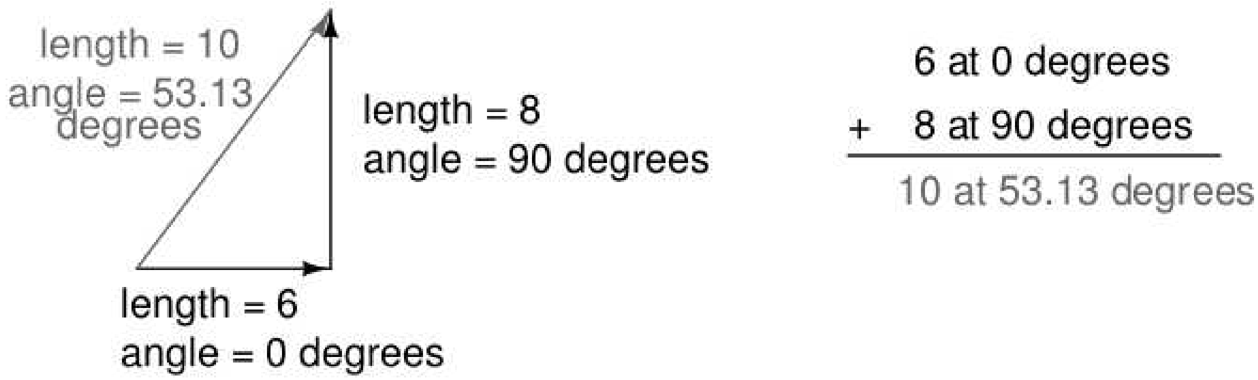
La tensión resultante puede expresarse de dos maneras diferentes: 2 voltios con un desfase de 180º con el símbolo (-) a la izquierda y el símbolo (+) a la derecha, o 2 voltios sin desfase con el símbolo (+) a la izquierda y el símbolo (-) a la derecha.

La inversión de la polaridad de una fuente de tensión alterna equivale a un desfase de la fuente de 180º .



4 Adición de vectores avanzada

La suman de vectores con ángulos diferentes, es distinta a la de las magnitudes escalares.



Si dos tensiones de CA, desfasadas en 90º, se suman conectándolas en serie, sus valores de tensión ni se suman ni se restan directamente, como ocurre con las tensiones escalares en CC. En cambio, estos valores de tensión son magnitudes complejas, y como muestran los vectores de la imagen, se suman de forma trigonométrica. Una fuente de 6 voltios con águlo de fase de 0º sumada a una fuente de 8 voltios con ángulo de fase de 90º da como resultado 10 voltios con un ángulo de fase de 53,13º.

Comparado con el análisis de circuitos de corriente continua, esto es muy extraño. Se obtenienen lecturas de 6 y 8 voltios, en las dos fuentes de tensión alterna, y sin embargo la medición de las dos fuentes conectadas en serie da 10 voltios de tensión total.

En CC no existe lo que se está viendo aquí con dos tensiones de CA ligeramente desfasadas. Las tensiones continuas sólo pueden sumarse o restarse, sin opciones intermedias.

Con la CA, dos tensiones pueden combinarse de diversas formas entre la suma y la resta.

La notación vectorial (los números complejos) permiten realizar los cálculos matemáticos necesarios para describir las magnitudes de CA.

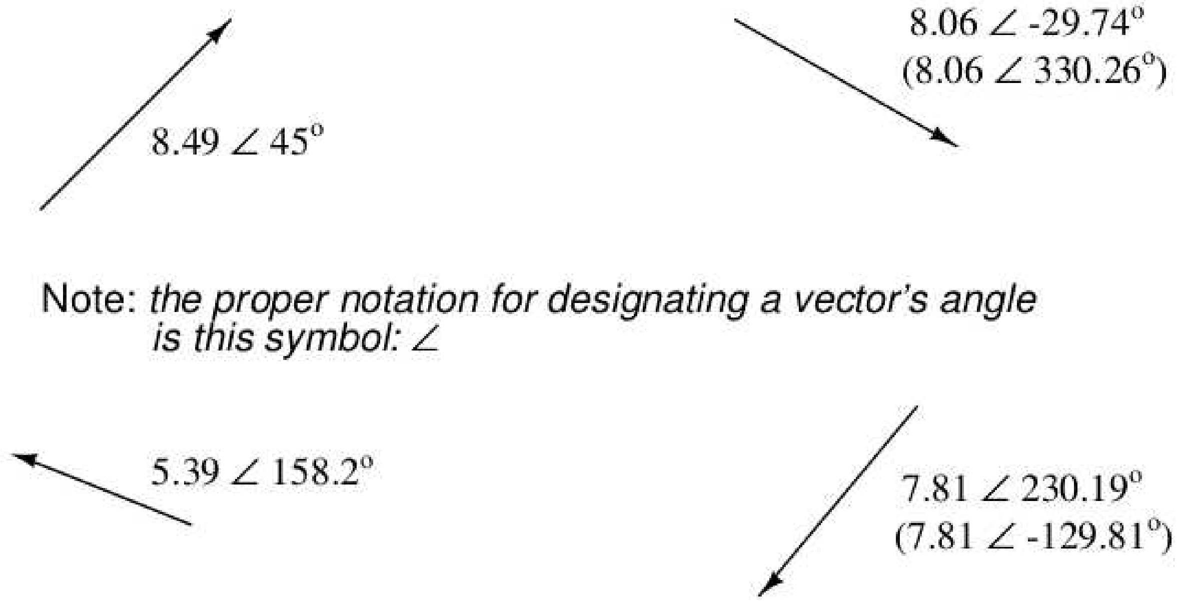
Resumen

- Las tensiones continuas conectadas en serie, sólo pueden sumarse o restarse. Las tensiones de CA pueden combinarse de diversas formas, dependiendo del desfase entre ellas.

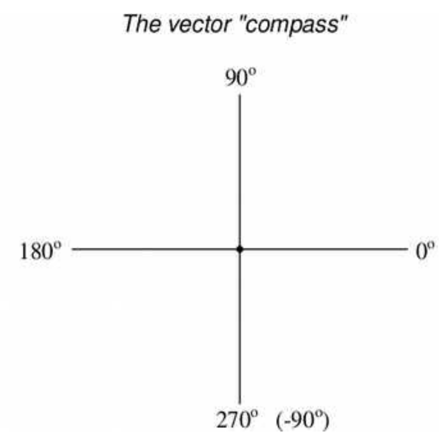
5 Notación polar y rectangular

Para trabajar con los números complejos sin dibujar vectores, es necesitario algún tipo de notación matemática estándar. Existen dos formas básicas de notación de números complejos, la polar y la rectangular

En la **forma polar** se indican la longitud (también conocida como la magnitud, valor absoluto o módulo) y el ángulo del vector que representa el número complejo. Utilizando la analogía del mapa, la notación polar para el vector de Palma a Inca sería algo así como "30 km, noreste". He aquí unos ejemplos de vectores y sus notaciones polares.



La orientación estándar de los ángulos vectoriales en los cálculos de circuitos de CA define 0º a la derecha (horizontal), 90º hacia arriba, 180º a la izquierda y 270º hacia abajo. Los vectores con ángulos hacia "abajo" pueden tener ángulos representados en forma polar como números positivos superiores a 180, o números negativos inferiores a 180. Por ejemplo, un vector con un ángulo de 270º también se puede indicar con un ángulo de -90º.



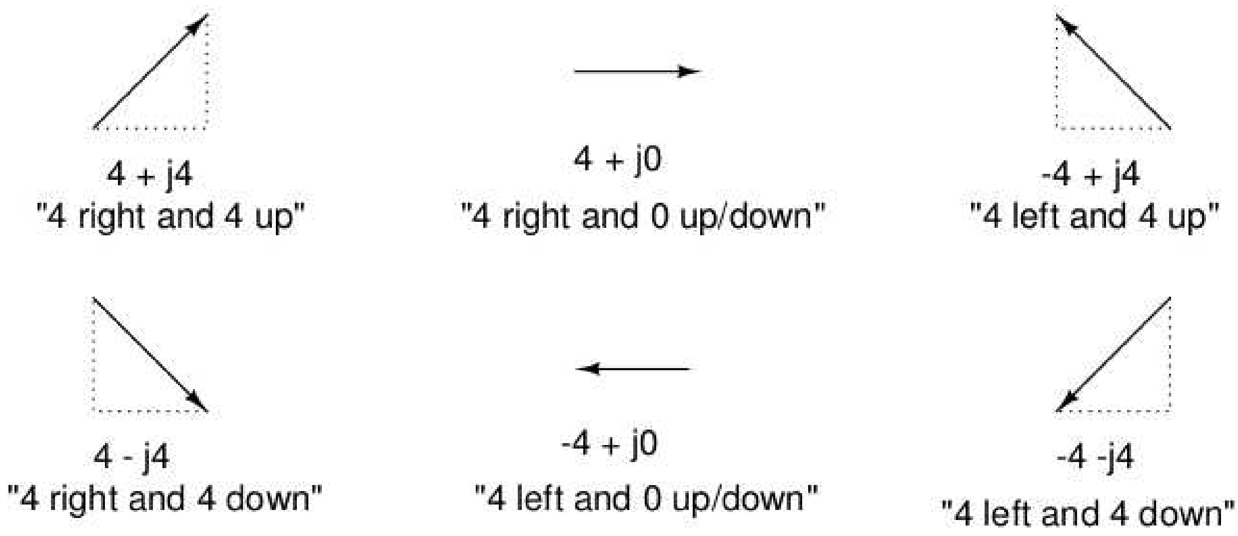
La **forma rectangular (binómica)**, es aquella en la que un número complejo se describe mediante sus componentes horizontal y vertical. El vector se toma como la hipotenusa de un triángulo rectángulo, descrito por las longitudes de los lados adyacentes y opuestos.

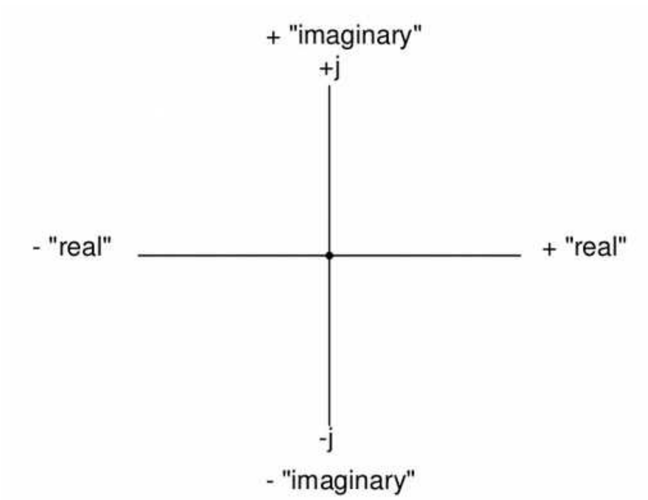
En lugar de describir la longitud y la dirección de un vector mediante la magnitud y el ángulo, se describe mediante su proyección sobre los ejes horizontal y vertical, es decir, su anchura y su altura.

Estas figuras bidimensionales (horizontal y vertical) están simbolizadas por dos cifras numéricas. Para distinguir las dimensiones horizontal y vertical entre sí, se antepone una "i" minúscula (en matemáticas puras) o una "j" (en electrónica) a la dimensión vertical.

Estas minúsculas no representan una variable física (como la corriente instantánea, también simbolizada por una letra "i" minúscula), sino que son operadores matemáticos utilizados para distinguir la componente vertical del vector de su componente horizontal.

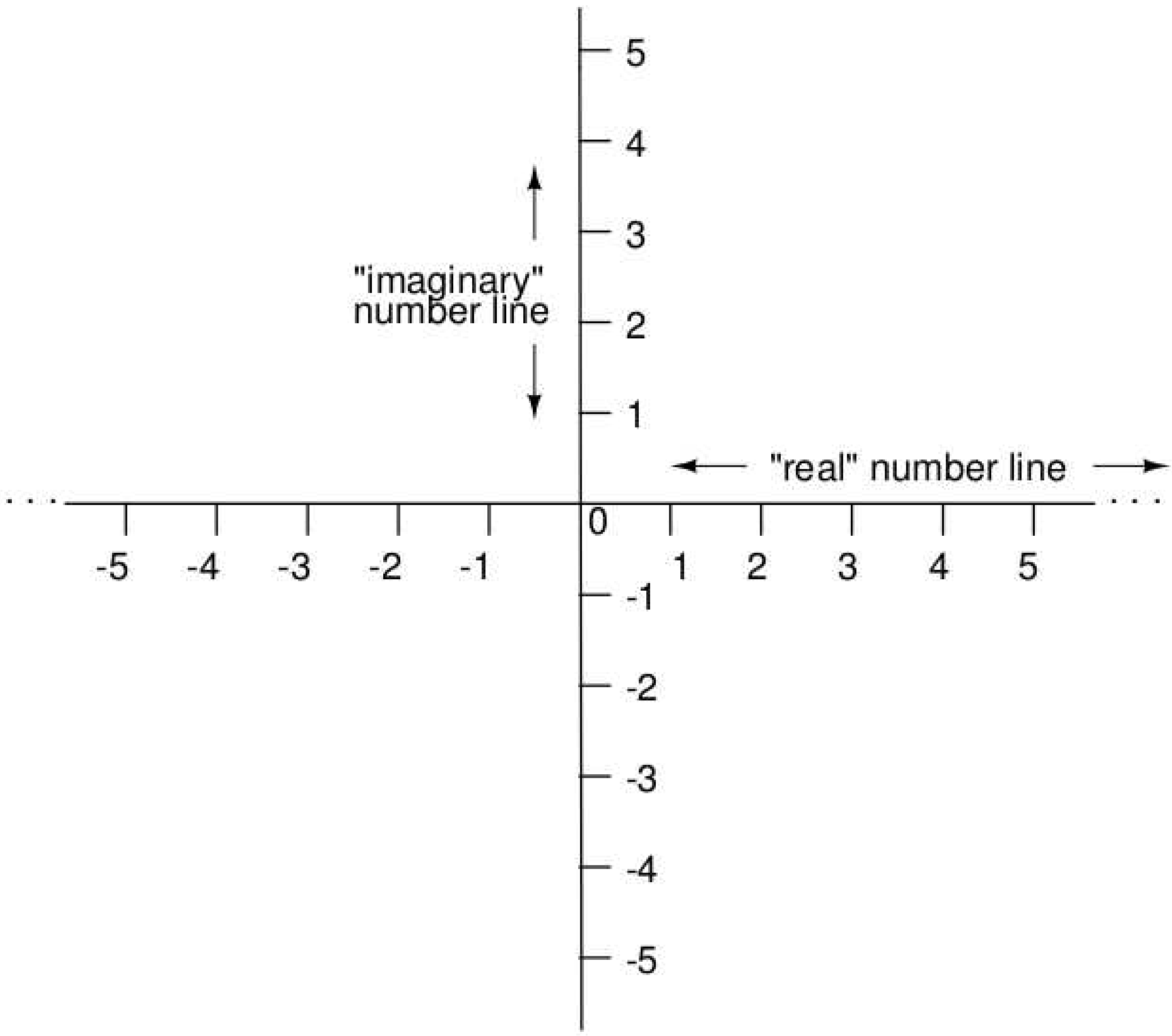
El número complejo completo, está compuesto por la suma de los valores horizontal y vertical.





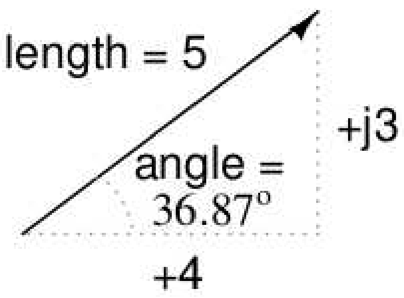
La componente horizontal se denomina componente real, ya que esta dimensión es compatible con los números escalares ("reales") normales. La componente vertical se denomina imaginaria, ya que esa dimensión se encuentra en una dirección diferente, ajena a la escala de los números reales.

El eje "real" del gráfico corresponde a la recta numérica conocida, con valores positivos y negativos. El eje "imaginario" del gráfico corresponde a otra recta numérica situada a 90° respecto a la "real". Los vectores son elementos bidimensionales, por lo que es necesario tener un "mapa" bidimensional en el que representarlos.



Ambos métodos de notación son válidos para los números complejos. El motivo de tener dos métodos de notación es para facilitar el cálculo, la forma rectangular se presta a la suma y la resta, y la forma polar se presta a la multiplicación y la división.

La conversión entre las dos formas de notación requiere una simple operación de trigonometría. Para **convertir de polar a rectangular**, se halla la componente real multiplicando la magnitud polar (longitud del vector) por el coseno del ángulo, y la componente imaginaria multiplicando la magnitud polar (longitud del vector) por el seno del ángulo. Esto puede entenderse más fácilmente dibujando las magnitudes como lados de un triángulo rectángulo, la hipotenusa del triángulo representando el vector (su longitud y ángulo con respecto a la horizontal constituyen la forma polar), los catetos representan los componentes rectangulares "real" e "imaginario".



$5 \angle 36.87^{\circ}$ **(polar form)**

$(5)(\cos 36.87^{\circ}) = 4$ (real component)

$(5)(\sin 36.87^{\circ}) = 3$ (imaginary component)

$4 + j3$ **(rectangular form)**

Para **convertir de rectangular a polar**, hallar la magnitud polar mediante el uso del “Teorema de Pitágoras” (el módulo polar es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y los componentes real e imaginario son los lados adyacente y opuesto, respectivamente), y el ángulo mediante la función arcotangente del componente imaginario dividido entre el componente real.

$4 + j3$ **(rectangular form)**

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (pythagorean theorem)

polar magnitude $= \sqrt{4^2 + 3^2}$

polar magnitude $= 5$

polar angle $= \arctan \frac{3}{4}$

polar angle $= 36.87^{o}$

$5 \angle 36.87^{o}$ **(polar form)**

Resumen

- La notación polar describe un número complejo mediante la longitud de su vector y su dirección angular. Ejemplo: navegar 45 millas sureste y a continuación 18 millas est
- En notación rectangular, el primer valor es el componente "real" (dimensión horizontal del vector) y el segundo valor es el componente "imaginario" (dimensión vertical del vector). El componente imaginario va precedido de una "j" minúscula, a veces denominada operador j.
- Ambas formas de notación, polar y rectangular, de un número complejo pueden representarse gráficamente en la forma de un rectángulo, en el que la hipotenusa representa el vector (forma polar: longitud de la hipotenusa = módulo o magnitud; ángulo con respecto a la horizontal = ángulo), el cateto horizontal representa la componente "real" rectangular, y el cateto vertical representa la componente "imaginaria" rectangular.

6 Aritmética de los números complejos

Los números complejos, al igual que los números escalares, pueden sumarse, restarse, multiplicarse, dividirse, elevarse al cuadrado, etc., como cualquier otro tipo de número. Algunas calculadoras científicas están programadas para realizar directamente estas operaciones con números complejos. Estas operaciones también se pueden hacer "a mano". A continuación se mostrará cómo realizar las operaciones básicas. Se recomienda una calculadora científica capaz de realizar funciones aritméticas con números complejos.

Sumar y restar con números complejos en forma rectangular es fácil. Para sumar o restar, basta con sumar o restar los componentes reales e imaginarios de los números, obteniendo así el componente real e imaginario de la suma o resta.

$$\begin{array}{r} 2 + j5 \\ +\ 4 - j3 \\ \hline \mathbf{6 + j2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 175 - j34 \\ +\ 80 - j15 \\ \hline \mathbf{255 - j49} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -36 + j10 \\ +\ 20 + j82 \\ \hline \mathbf{-16 + j92} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 + j5 \\ -\ (4 - j3) \\ \hline \mathbf{-2 + j8} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 175 - j34 \\ -\ (80 - j15) \\ \hline \mathbf{95 - j19} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -36 + j10 \\ -\ (20 + j82) \\ \hline \mathbf{-56 - j72} \end{array}$$

Para multiplicar y dividir, la notación preferida es la polar. Para multiplicar números complejos en forma polar, se multiplican los módulos de los números complejos para determinar el módulo del producto y se suman los ángulos para determinar el ángulo del producto.

$$(35 \angle 65^o)(10 \angle -12^o) = \mathbf{350 \angle 53^o}$$

$$(124 \angle 250^o)(11 \angle 100^o) = \mathbf{1364 \angle -10^o}$$

or

$$\mathbf{1364 \angle 350^o}$$

$$(3 \angle 30^o)(5 \angle -30^o) = \mathbf{15 \angle 0^o}$$

La división de números complejos de forma polar también es fácil: basta con dividir el módulo del primer número entre el módulo del segundo número, y restar del ángulo del primer número el ángulo del segundo para obtener magnitud y ángulo del cociente.

$$\frac{35 \angle 65^o}{10 \angle -12^o} = \mathbf{3.5 \angle 77^o}$$

$$\frac{124 \angle 250^o}{11 \angle 100^o} = \mathbf{11.273 \angle 150^o}$$

$$\frac{3 \angle 30^o}{5 \angle -30^o} = \mathbf{0.6 \angle 60^o}$$

Para obtener el recíproco, o "invertir" (1/x), un número complejo, basta con dividir 1, que no es más que un número complejo sin componente imaginaria (ángulo = 0), entre el número (en forma polar).

$$\frac{1}{35 \angle 65^o} = \frac{1 \angle 0^o}{35 \angle 65^o} = \mathbf{0.02857 \angle -65^o}$$

$$\frac{1}{10 \angle -12^o} = \frac{1 \angle 0^o}{10 \angle -12^o} = \mathbf{0.1 \angle 12^o}$$

$$\frac{1}{0.0032 \angle 10^o} = \frac{1 \angle 0^o}{0.0032 \angle 10^o} = \mathbf{312.5 \angle -10^o}$$

Estas son las operaciones básicas necesarias para manipular números complejos en el análisis de circuitos de corriente alterna. Sin embargo, las operaciones con números complejos no se limitan a la suma, resta, multiplicación, división e inversión. Prácticamente cualquier operación aritmética que se pueda realizar con números escalares se puede realizar con números complejos, incluyendo potencias, raíces, números complejos e incluso funciones trigonométricas. Es importante dominar las operaciones aritméticas básicas de suma, resta, multiplicación división e inversión, para resolver los problemas relacionados con el análisis de circuitos de CA.

Resumen

- Para sumar números complejos en forma rectangular, se suman las componentes reales y se suman las imaginarias. La resta es similar.
- Para multiplicar números complejos en forma polar, se multiplican los módulos y se suman los ángulos. Para dividir, se dividen los módulos y se restan los ángulos.

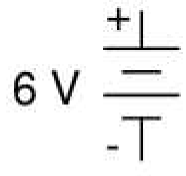
7 Polaridad en AC

Los números complejos son útiles para el análisis de circuitos de CA porque proporcionan un método conveniente de indicar simbólicamente el desfase entre magnitudes de CA como la tensión y la corriente. Sin embargo, la equivalencia entre vectores abstractos y magnitudes de circuito reales no es fácil de comprender.

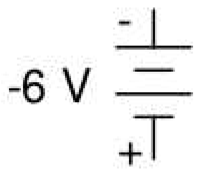
En un apartado anterior se mostraron fuentes de voltaje de CA con valores en forma compleja (magnitud y ángulo de fase), así como símbolos de polaridad en sus contactos. Sabiendo que la corriente alterna no tiene una "polaridad" establecida como la corriente continua, estas polaridades y su relación con el ángulo de fase pueden confundir. A continuación se pretende aclarar algunas de estas cuestiones.

La tensión es una magnitud intrínsecamente relativa. Al medir una tensión, se puede elegir cómo conectar un voltímetro a la fuente de tensión, ya que hay dos puntos entre los que existe tensión, y dos sondas en el instrumento con las que realizar la conexión. En los circuitos de corriente continua, la polaridad de las fuentes de tensión y de las caídas de tensión se indica con "+" o "-", y se utilizan sondas de medición codificadas por colores (rojo y negro). Si un voltímetro digital indica una tensión continua negativa, se sabe que las sondas están conectadas "al revés" de la polaridad de la fuente de tensión (el cable rojo conectado al "-" y el cable negro al "+").

Las baterías tienen su polaridad designada mediante simbología, el lado de la línea corta es siempre el lado negativo (-) y el lado largo es siempre el positivo (+).



Aunque sería matemáticamente correcto representar el voltaje de una batería como una cifra negativa con la polaridad invertida, sería muy poco convencional.

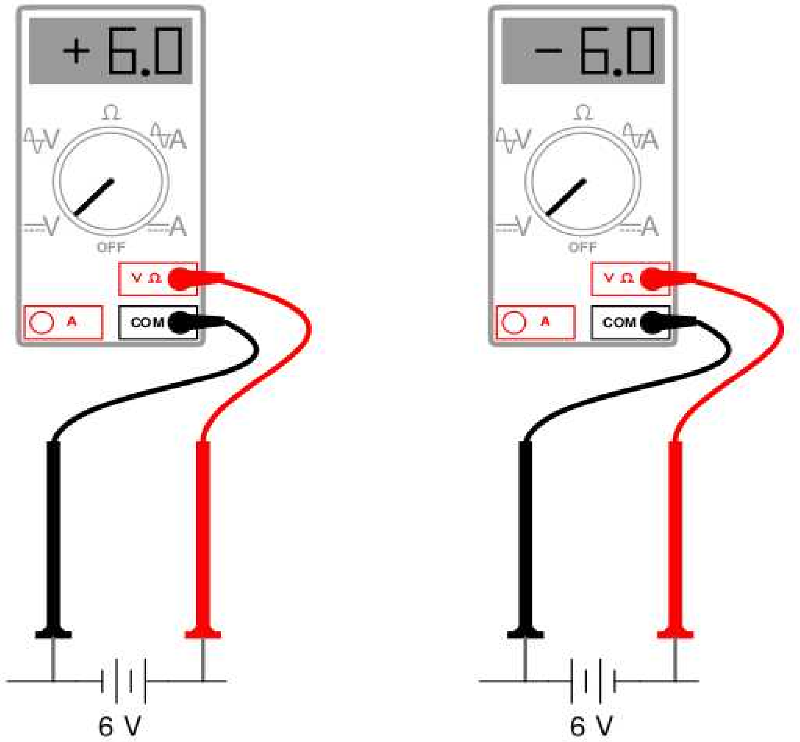


La interpretación de esta notación podría ser más sencilla si las marcas de polaridad "+" y "-" se considerasen como puntos de referencia para las sondas del voltímetro, el "+" significando "rojo" y el "-" significando "negro". Un voltímetro conectado a la batería anterior con la sonda roja en el terminal inferior y la negra en el terminal superior indicaría una tensión negativa (-6 voltios). En realidad, esta forma de notación no es tan inusual como podría pensarse: es común en problemas de análisis de redes de CC, en los que las marcas de polaridad "+" y "-" se estiman inicialmente, y más tarde se interpretan como correctas o incorrectas según el signo matemático de la cifra calculada.

Sin embargo, en los circuitos de CA no se utilizan valores negativos de tensión. En su lugar se indica la medida en que una tensión aumenta o reduce otra dependiendo del desfase entre las tensiones. No es necesario utilizar valores negativos de tensión porque la notación polar permite que los vectores apunten en direcciones opuestas. Una tensión alterna opuesta a otra, se indica mediante un desfase de 180º entre las tensiones.

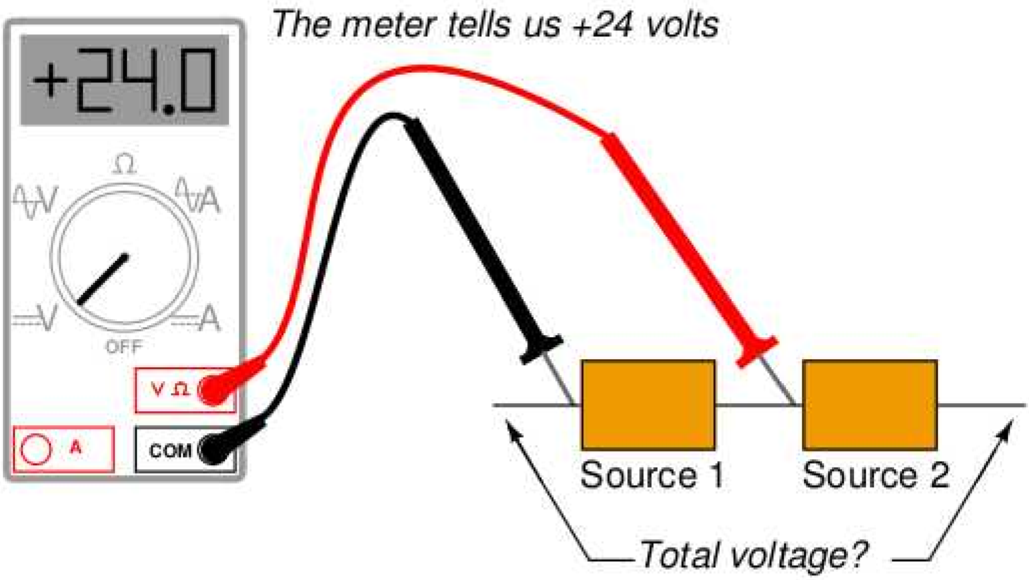
Aun así, la tensión es relativa entre dos puntos, y podemos elegir cómo conectar un instrumento para medir la tensión entre esos dos puntos. El signo matemático de la lectura de un voltímetro de CC sólo tiene sentido en el contexto de las conexiones de sus sondas, qué terminal toca el cable rojo y qué terminal toca el cable negro. Del mismo modo, el ángulo fase de una tensión alterna sólo tiene sentido en el contexto de saber cuál de los dos puntos se considera el punto de "referencia". Por este motivo, las marcas de polaridad "+" y "-" suelen colocarse junto a los terminales de una tensión alterna en los esquemáticos eléctricos para dar al ángulo de fase indicado un marco de referencia.

A continuación se muestran algunos ejemplos de estos principios. En primer lugar, la relaciòn entre el signo matemático y la indicación de un voltímetro de CC.



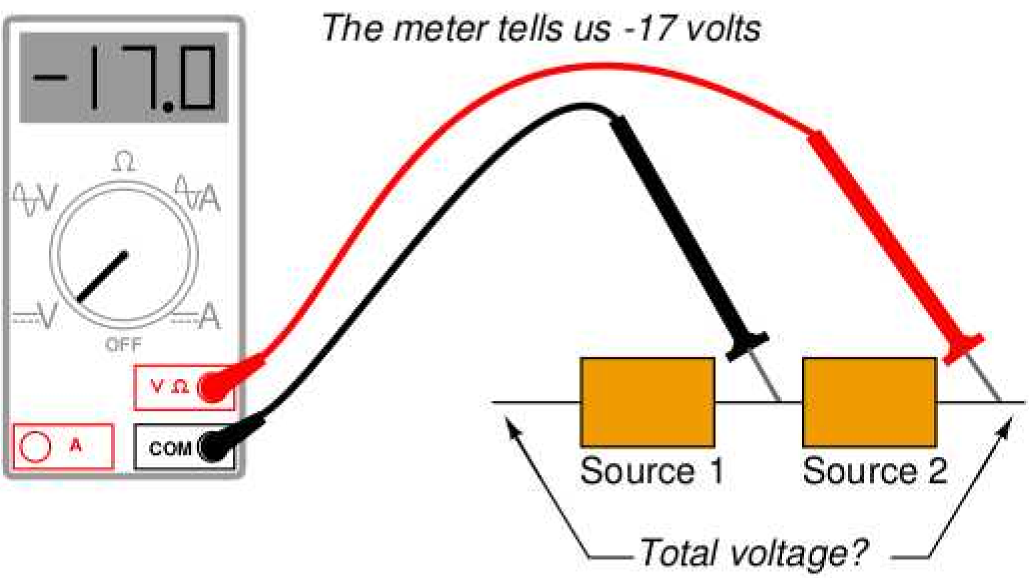
El signo matemático de la pantalla de un voltímetro digital de CC sólo tiene significado en el contexto de la conexión de sus sondas. Considere el uso de un voltímetro de CC para determinar si dos fuentes de tensión continua se ayudan o se oponen entre sí, suponiendo que las polaridades de las fuentes son desconocidas. La imagen muestra el voltímetro midiendo la tensión de la primera fuente.

Esta primera medición de +24 en la batería izquierda indica que la sonda negra realmente está tocando el lado negativo de la fuente de tensión nº 1, y la sonda roja el positivo. De esta forma se ha averiguado la polaridad de la batería 1.

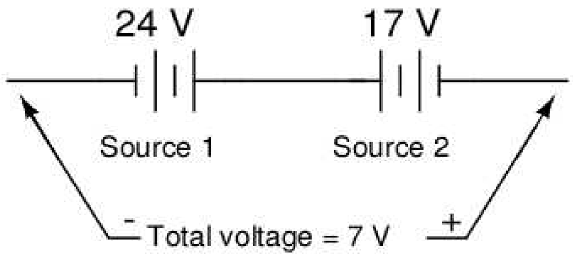


A continuación se mide la batería 2: (Figura 2.30)

Esta segunda lectura del voltímetro, sin embargo, es negativa -17 voltios, lo que indica que la sonda negra está tocando el lado positivo de la batería 2, mientras que la roja está tocando el lado negativo. De esto se deduce que la polaridad de la batería 2 es opuesta a la de la batería 1.

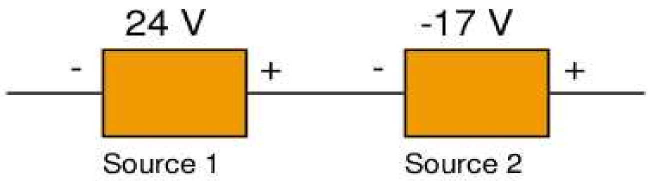


Resulta obvio que estas dos baterías tienen polaridades opuestas. Las tensiones opuestas se restan entre sí, obteniendo la tensión total de 7 voltios.



Sin embargo, se podrían representar las dos fuentes de alimentación, identificadas con los voltajes leidos en el voltímetro (incluyendo el signo).

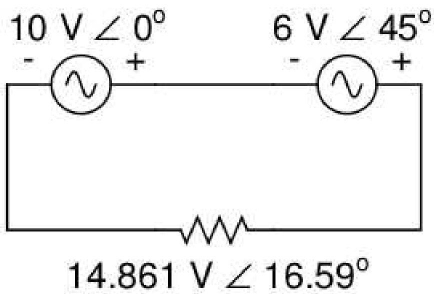
En este caso, las polaridades en las fuentes se corresponden con el color de las sondas de medición del voltímetro.



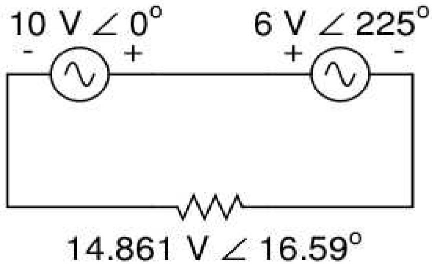
Si se asigna la polaridad en función de las sondas de medición, y se realiza el cálculo del valor total respetando el sigo del valor marcado por el polímetro, el resultado siempre será corecto, independientemente de que las polaridades de las fuentes coincidan o no con los colores de las sondas.

Por lo tanto, los colores de las sondas con las que se determina la polaridad, sirven como marco de referencia para situar los signos de los valores de tensión en el contexto adecuado.

Lo mismo ocurre con las tensiones de CA, solo que en este caso el ángulo de fase sustituye al signo matemático. Para relacionar entre sí varias tensiones de CA con ángulos de fase diferentes, son necesarios signos de polaridad que proporcionen marcos de referencia para los ángulos de fase de dichas tensiones.

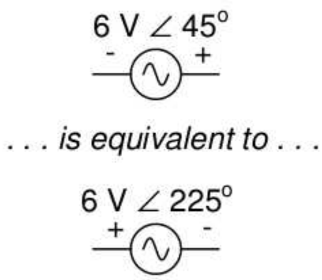


Las polaridades de estas dos fuentes de tensión indican una suma, por lo que para determinar la tensión total a través de la resistencia se deben sumar las tensiones de 10 V ∠0º y 6 V ∠45º, obteniendo 14,861 V ∠16,59º . Sin embargo, se podría representar la fuente de 6 voltios como 6 V ∠225º, invirtiendo en este caso su polaridad, y se obtendría la misma tensión total.



6 V ∠45º con el polo negativo a la izquierda y positivo a la derecha es exactamente igual a 6 V

∠225º con el polo positivo a la izquierda y negativo a la derecha, la inversión de la polaridad equivale a la adición de 180º al ángulo de fase.



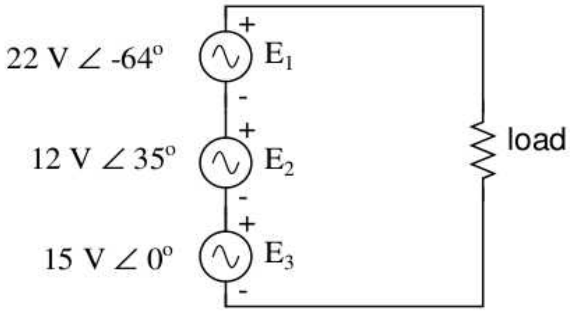
A diferencia de las fuentes de tensión continua, cuyos símbolos definen la polaridad mediante líneas cortas y largas, las fuentes de tensión alterna no tienen ninguna marca de polaridad que corresponda a contactos reales. Las polaridades se pueden indicar de manera aleatoria en el esquema, pero deben estar correctamente relacionadas con los ángulos de fase para representar correctamente las condiciones del circuito eléctrico.

Resumen

- A veces, en los esquemas de los circuitos de CA, las tensiones llevan indicaciones de polaridad para proporcionar un marco de referencia a sus ángulos de fase.

8 Ejemplos con circuitos de CA

En el siguiente ejemplo se conectan tres fuentes de tensión alterna en serie y se utilizan los números complejos para calcular las tensiones resultantes. Todas las reglas y leyes aprendidas en el estudio de los circuitos de CC se aplican también a los circuitos de CA (ley de Ohm, leyes de Kirchhoff, métodos de análisis de redes), a excepción del cálculo de la potencia (Ley de Joule). Es necesario que todas las variables se expresen en números complejos, teniendo en cuenta tanto la fase como la magnitud, y que todas las tensiones y corrientes sean de la misma frecuencia (para que sus desfases permanezcan constantes).

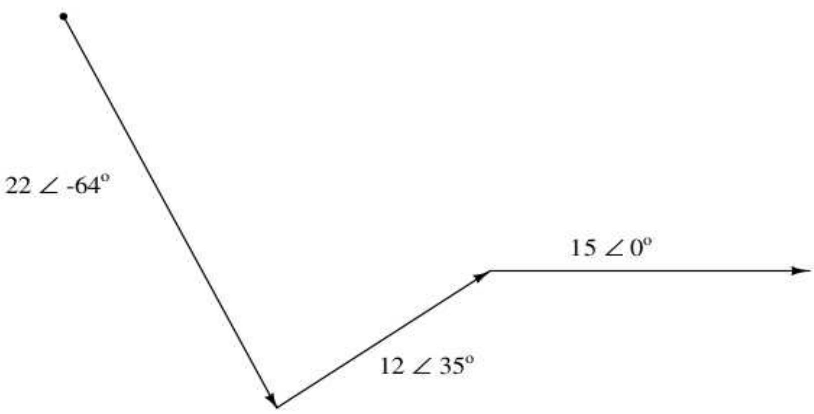


Las polaridades de las tres fuentes de tensión están orientadas de forma que sus tensiones se sumen para formar la tensión total a través de la resistencia de carga. Al no especificarse frecuencias para las fuentes de alimentación se entiende que son iguales. Por lo tanto, se cumplen los requisitos para aplicar las reglas de CC a un circuito de CA (todas los valores se dan en forma compleja, todas las fuentes tienen la misma frecuencia). La ecuación para hallar la tensión total es la siguiente.

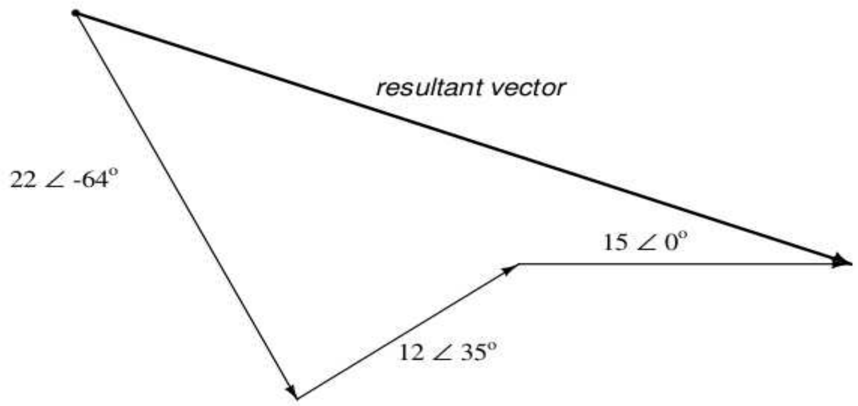
$$E_{total} = E_1 + E_2 + E_3$$

$$E_{total} = (22\ V \angle -64^o) + (12\ V \angle 35^o) + (15\ V \angle 0^o)$$

La adición gráfica de los vectores es la siguiente.



La suma de estos vectores es un vector resultante que se comienza en el punto inicial del vector de 22 voltios (punto en la parte superior izquierda del diagrama) y termina en el punto final del vector de 15 voltios (punta de flecha en el centro-derecha del diagrama)



Para determinar cuál es el módulo y el ángulo del vector resultante sin recurrir a la suma gráfica, se puede convertir cada uno de estos números complejos de forma polar a forma rectangular y sumarlos. Se debe recordar que los valores se suman porque las polaridades de las tres fuentes de tensión (ver esquema) lo exigen.

$$15\ \text{V} \angle 0^{\circ} = 15 + j0\ \text{V}$$

$$12\ \text{V} \angle 35^{\circ} = 9.8298 + j6.8829\ \text{V}$$

$$22\ \text{V} \angle -64^{\circ} = 9.6442 - j19.7735\ \text{V}$$

$$\begin{array}{llll} & 15 & +j0 & \text{V} \\ & 9.8298 & +j6.8829 & \text{V} \\ + & 9.6442 & -j19.7735 & \text{V} \\ \hline & \mathbf{34.4740} & \mathbf{-\ j12.8906} & \mathbf{V} \end{array}$$

En forma polar, equivale a 36,8052 V ∠-20,5018º. Esto significa que la tensión medida a través de estas tres fuentes de tensión será de 36,8052 V, con un desfase de 20,5018º de retraso respecto a la tensión de referencia de 15 V (0º fase). Un voltímetro sólo indicaría el módulo de la tensión (36,8052 voltios), no el ángulo. Un osciloscopio podría utilizarse para mostrar las dos ondas de tensión y, por tanto, proporcionar una medición de desplazamiento de fase. El mismo principio se aplica a los amperímetros de CA, indican la magnitud polar de la corriente, no el ángulo de fase.

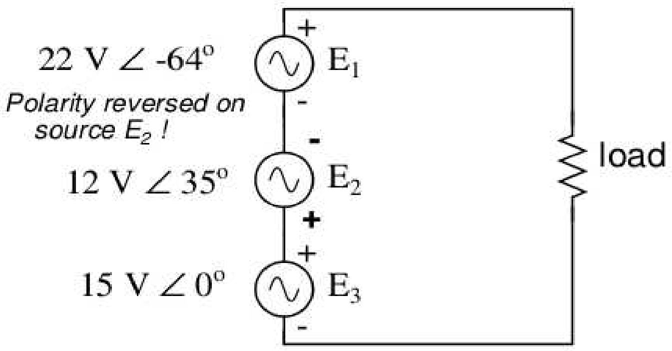
Ejercicio 8_1

Realiza la suma de las tensiónes del ejemplo anterior en una hoja de cálculo.

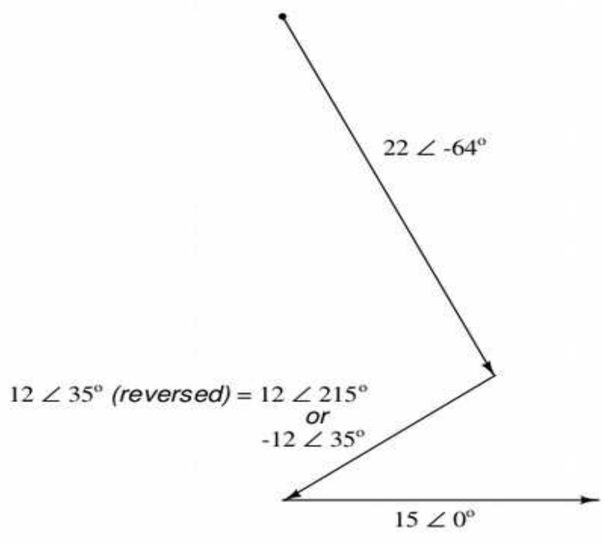
Solución

A primera vista, el resultado parece extraño. ¿Cómo es posible obtener una tensión total de poco más de 36 voltios con fuentes de 15 voltios, 12 voltios y 22 voltios conectadas en serie? En CC esto sería imposible, ya que las cifras de tensión se sumarán o restarán, dependiendo de la polaridad. Pero en CA, la "polaridad" (desplazamiento de fase) puede variar entre polaridad igual y contraria, tomando cualquier punto intermedio entre estos extremos. Por eso se pueden obtener resultados paradójicos.

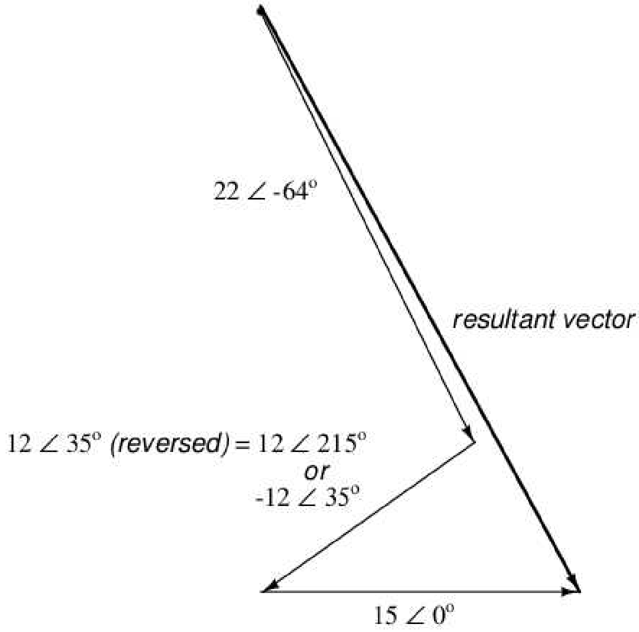
¿Y si se invirtiesen las conexiones de una de las fuentes de alimentación? Su contribución a la tensión total sería la opuesta a la que tenía antes.



El ángulo de fase de la fuente de 12 voltios sigue siendo 35º , aunque la conexión se haya invertido. Sin embargo al invertir la polaridad de la fuente, esta tensión ya no se suma a las otras dos, sino que se resta. Aunque el ángulo siga indicado como 35º, el vector se dibujará 180º girado respecto a su dirección anterior.



El vector resultante (suma) debe comenzar en el punto superior izquierdo (origen del vector de 22 voltios) y terminan en la punta de la flecha derecha del vector de 15 voltios.



La inversión de la polaridad de la fuente de 12 V puede representarse de dos formas diferentes en forma polar: añadiendo 180º a su ángulo (lo que lo convierte en 12 V ∠ 215º), o invirtiendo el signo de la tensión (lo que lo convierte en -12 V ∠ 35º). En cualquier caso, la conversión a forma rectangular da el mismo resultado.

$$12\text{ V} \angle 35^\circ \ \textit{(reversed)} = 12\text{ V} \angle 215^\circ = \mathbf{-9.8298 - j6.8829\ V}$$

$$\textit{or}$$

$$-12\text{ V} \angle 35^\circ = \mathbf{-9.8298 - j6.8829\ V}$$

La suma resultante de tensiones en forma rectangular es:

$$\begin{array}{rrl} & 15 & + j0 \quad \text{V} \\ & -9.8298 & - j6.8829\ \text{V} \\ + & 9.6442 & - j19.7735\ \text{V} \\ \hline & \mathbf{14.8143} & \mathbf{- j26.6564\ V} \end{array}$$

En formato polar esto equivale a 30,4964 V ∠-60,9368º.

Ejercicio 8_2

Realiza la suma de las tensiónes del ejemplo anterior en una hoja de cálculo.

Solución

Resumen

- Para tensiones y corrientes de idéntica frecuencia, todas las leyes y reglas de los circuitos de CC se aplican a CA, a excepción de los cálculos de potencia (Ley de Joule), siempre que todos los valores se expresen en números complejos.
- Cuando se invierte la dirección de un vector (equivalente a invertir la polaridad de una fuente de tensión alterna en relación con otras fuentes de tensión), puede expresarse en cualquiera de las dos formas siguientes, sumando 180º al ángulo, o invirtiendo el signo del módulo.
- Los valores medidos en un circuito de CA corresponden a los valores polares utilizados para el cálculo de una onda sinoidal. La representación rectangular (binómica) de magnitudes complejas de un circuito de CA, son convenientes para realizar sumas y restas, como requieren las leyes de tensión y corriente de Kirchhoff.

Estos apuntes son una adaptación de “Lessons In Electric Circuits – Volume II - AC” , del autor Tony R. Kuphaldt.

Traducción y adaptación Paulino Posada

Traducción realizada con la versión gratuita del traductor www.DeepL.com/Translator